ZWEI BEMERKENSWERTE KLASSEN SIMULTANER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWISCHEN DREI VARIABELN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

AN DER

UNIVERSITÄT LEIPZIG

VORGELEGT VON

PAUL PFITZNER.

MAX ERLER
DR. PHIL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1884.

Inhalt.

Im 18. Bande des Liouville'schen Journals veröffentlichte Serret im Jahre 1853 eine interessante Abhandlung unter dem Titel: Sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure. Er hatte sich nämlich mit den beiden geometrischen Aufgaben beschäftigt, eine räumliche Kurve zu finden, wenn von ihr gegeben ist entweder die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte, oder die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte; und diese beiden Aufgaben hatten ihn auf gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen drei Variabeln geführt, welche lediglich zusammengesetzt waren aus Integralen zweier Differentialgleichungen dritter Ordnung im ersten Fall, aus Integralen nur einer Differentialgleichung vierter Ordnung im zweiten Fall. Da er nun ferner fand, dass die singuläre Lösung der aufgestellten Differentialgleichungen die wirklich geometrisch wichtige war, so versuchte er ganz allgemein eine Methode zu geben zur Auffindung der singulären Lösung zweier solcher simultaner Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, welche allein gebildet sind aus Integralen einer oder zweier Differentialgleichungen der nächst höheren Ordnung. Angeregt durch diese Arbeit Serret's behandelte Herr Professor Dr. A. Mayer diese Fragen im Königl. mathematischen Seminar an hiesiger Universität (Wintersemester 1882/83), indem er sich auf die Annahme beschränkte, dass die Differentialgleichungen gebildet seien aus Integralen von zwei Differentialgleichungen zweiter oder von einer Differentialgleichung dritter Ordnung. Da er unter dieser Beschränkung die diesbezügliche Theorie in der allgemeinsten Fassung erschöpfend behandelte, war nunmehr der Weg dazu geebnet, sie in allen Punkten auf Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung auszudehnen und die hierbei von Serret gelassenen Lücken zu ergänzen. Dies beabsichtigt die vorliegende Abhandlung.

Wählt man von vornherein x als unabhängige Variable und bezeichnet man die vollständige Differentiation nach x immer durch obere Indices, z. B.

$$y^n = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad z^n = \frac{d^n z}{dx^n}, \quad f^m = \frac{d^m f}{dx^m} \quad \text{etc.},$$

so sind die Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, um deren Integration es sich handelt, die folgenden:

$$F(XX_1 \ldots X_m) = 0, \qquad \Phi(XX_1 \ldots X_m) = 0.$$

Darin sind F und Φ irgend welche unabhängige Funktionen von $XX_1 \ldots X_m$ und diese wieder Funktionen von

$$xyzy'z'y''z'' \ldots y^n z^n$$

derart, daſs

$$X = a, \qquad X_1 = a_1, \qquad \ldots X_m = a_m$$

(wo $a, a_1 \ldots a_m$ willkürliche Konstanten bedeuten) $m+1$ Integrale sind entweder von *einer* Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen xyz:

$$\Omega = 0$$

(dies ist Serret's erste Klasse), oder von denselben *beiden* Differentialgleichungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\Omega = 0, \qquad \Omega_1 = 0$$

(Serret's zweite Klasse). Diese letztre wollen wir zuerst behandeln, um das exceptionelle Verhalten der ersten Klasse, dem regulären dieser zweiten gegenüber, besser hervortreten zu lassen; wir gliedern, diesen Klassen entsprechend, die Betrachtung in zwei Teile und bringen beide Male zuerst eine Diskussion der betreffenden Integrale, sodann die allgemeine und die singuläre Lösung; zum Schluſs Beispiele (besonders die Serret'schen).

Erster Teil. Serret's zweite Klasse.

§ 1. Vorbemerkungen.

Es seien

$$(1) \qquad \begin{cases} X(xyzy'z'y''z'' \ldots y^n z^n) = a, \quad X_1 = a_1, \\ X_2 = a_2, \quad \ldots \quad X_m = a_m \end{cases}$$

$m+1$ unabhängige Integrale derselben beiden unabhängigen Differentialgleichungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega(xyzy'z' \ldots y^{n+1} z^{n+1}) = 0 \\ \Omega_1(xyzy'z' \ldots y^{n+1} z^{n+1}) = 0, \end{cases}$$

oder in andrer Form, nach y^{n+1} und z^{n+1} aufgelöst:

$$(2') \qquad \left.\begin{aligned} y^{n+1} &= Y(xyzy'z' \ldots y^n z^n) \\ z^{n+1} &= Z(xyzy'z' \ldots y^n z^n) \end{aligned}\right\}.$$

Es entsteht hier sofort die Frage, die Serret nur zur Hälfte behandelt:

Wie erkennt man, ob die mit den $(m+1)$ gegebenen Funktionen $X, X_1 \ldots X_m$ von

$$x\,y\,z\,y'\,z' \ldots y^n z^n$$

gebildeten Gleichungen (1) Integrale sind derselben beiden Differentialgleichungen $(n+1)^{ter}$ Ordnung (2), und wie findet man algebraisch je $(m+1)$ solche Gleichungen?

Zunächst ist, nach der Jakobi'schen Definition des Integrals, $X_i = a_i$ ein Integral jener Differentialgleichungen, wenn sein vollständiger Differentialquotient nach x:

$$\frac{dX_i}{dx} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial y} + z' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z} + \ldots + y^n \cdot \frac{\partial X_i}{\partial y^{n-1}} +$$

$$+ z^n \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z^{n-1}} + y^{n+1} \frac{\partial X_i}{\partial y^n} + z^{n+1} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z^n}$$

durch die Differentialgleichungen selbst identisch erfüllt wird, wenn also:

$$0 \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial y} + z' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z} + \cdots + y^n \cdot \frac{\partial X_i}{\partial y^{n-1}} +$$

$$+ z^n \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z^{n-1}} + Y \cdot \frac{\partial X_i}{\partial y^n} + Z \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z^n}.$$

Die Subtraktion beider Identitäten gibt:

(3) $$\frac{dX_i}{dx} \equiv (y^{n+1} - Y) \cdot \frac{\partial X_i}{\partial y^n} + (z^{n+1} - Z) \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z^n} = 0.$$

Beiläufig sei bemerkt, dafs kein Integral X_i gleichzeitig von y^n und z^n frei sein kann, denn dann wäre $\frac{\partial X_i}{\partial y_n} \equiv 0$, $\frac{\partial X_i}{\partial z^n} \equiv 0$, somit nach Gleichung (3): $\frac{dX_i}{dx} \equiv 0$, $X_i \equiv \text{const.}$, also wäre X_i überhaupt kein Integral, sondern eine blofse Konstante. Somit stellt sich der vollständige Differentialquotient jedes Integrals in der Form (3) dar, als lineare Funktion der auf Null reducierten Differentialgleichungen selbst, in welcher höchstens einer der beiden Terme fehlen kann, und man erkennt, dafs $(m+1)$ Gleichungen

(1) $$X_i = a_i, \qquad i = 0, 1, 2 \ldots m$$

Integrale der Gleichungen (2) sind, daran, dafs die sämtlichen $(m+1)$ Gleichungen

(4) $$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{dX_1}{dx} = 0, \quad \cdots \frac{dX_m}{dx} = 0$$

befriedigt werden durch dieselben beiden Werte

(2') $$y^{n+1} = Y, \quad z^{n+1} = Z,$$

welche sich aus irgend zweien geeigneten unter ihnen ergeben durch

Auflösung nach y^{n+1} und z^{n+1}. Es ist also nur noch notwendig, daſs nicht alle $(m+1)$ Integrale frei sind von einer der Gröſsen y^n und z^n; denn sonst würden die Gleichungen (4) sämtlich nur einen der Terme $(y^{n+1}-Y)$, $(z^{n+1}-Z)$ enthalteu.

Sind nun die Gleichungen (1) $(m+1)$ unabhängige Integrale der Gleichungen (2), so läſst sich im allgemeinen in keiner Weise angeben, in Bezug auf welche von den Differentialquotienten sie gerade unabhängig sind. Dies muſs man aber wissen, um die weitere Betrachtung durchführen zu können. Wir werden daher annehmen, daſs die Integrale (1) gerade unabhängig sind bezüglich der höchsten Differentialquotienten gleichmäſsig von y wie von z, so daſs man aus ihnen gerade die $(m-1)$ höchsten Differentialquotienten eliminieren kann, was Serret für selbverständlich zu halten scheint. Diese Elimination führt auf zwei Gleichungen:

$$(5) \qquad \Pi = 0, \qquad \Pi_1 = 0.$$

Um deren Ordnung zu bestimmen, ist m als gerade oder ungerade zu unterscheiden. Ist m ungerade, also $(m+1)$ gerade, und sind unsrer Annahme gemäſs gerade

$$y^n z^n y^{n-1} z^{n-1} \ldots y^{n-\frac{m-3}{2}}, z^{n-\frac{m-3}{2}}$$

eliminierbar, so sind

$$(5^\alpha) \qquad \begin{cases} \Pi\left(xyzy'z'\ldots y^{n-\frac{m-1}{2}} z^{n-\frac{m-1}{2}} aa_1\ldots a_m\right) = 0 \\ \Pi_1\left(xyzy'z'\ldots y^{n-\frac{m-1}{2}} z^{n-\frac{m-1}{2}} aa_1\ldots a_m\right) = 0, \end{cases}$$

beide von der Ordnung $n-\frac{m-1}{2}$ bezüglich y und z. Ist m gerade und etwa

$$y^n z^n y^{n-1} z^{n-1} \ldots y^{n-\frac{m}{2}+2} z^{n-\frac{m}{2}+2} y^{n-\frac{m}{2}+1}$$

eliminierbar, so entstehen zunächst 2 Gleichungen mit $y^{n-\frac{m}{2}}$ und $z^{n-\frac{m}{2}+1}$. Indem man die eine von beiden benutzt, um die andre noch von $z^{n-\frac{m}{2}+1}$ zu befreien, entstehen die Gleichungen:

$$(5^\beta) \qquad \begin{cases} \Pi\left(xyzy'z'\ldots y^{n-\frac{m}{2}} z^{n-\frac{m}{2}} aa_1\ldots a_m\right) = 0 \\ \Pi_1\left(xyzy'z'\ldots y^{n-\frac{m}{2}} z^{n-\frac{m}{2}+1} aa_1\ldots a_m\right) = 0. \end{cases}$$

Für ungerade resp. gerade m sind alsdann (5^α) resp. (5^β) die Gleichungen, auf deren Integration diejenige des ursprünglichen Systems (2)

durch jene $(m+1)$ Integrale zurückgeführt wird. Umgekehrt sind diese Integrale äquivalent den $(m+1)$ Gleichungen:

$$(6^\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi = 0;\quad \Pi' = 0;\quad \Pi'' = 0 \ldots \Pi^{\frac{m-1}{2}} = 0 \\ \Pi_1 = 0;\quad \Pi_1' = 0 \ldots\ldots\ldots \Pi_1^{\frac{m-1}{2}} = 0 \end{array}\right\} \text{für ungerade } m,$$

$$\text{resp. } (6^\beta)\left\{\begin{array}{l} \Pi = 0 \quad \Pi' = 0 \ldots\ldots\ldots \Pi^{\frac{m}{2}} = 0 \\ \Pi_1 = 0 \quad \Pi_1' = 0 \ldots\ldots\ldots \Pi_1^{\frac{m}{2}-1} = 0 \end{array}\right\} \text{für gerade } m,$$

wobei die oberen Indices immer vollständige Differentiation nach x bedeuten; denn die vollständigen Lösungen y und z der Differentialgleichungen (2) erfüllen die (1) identisch, also auch die aus diesen entstandenen Gleichungen (5) und (6). Diese (6) sind aber ihrer Entstehung gemäſs $(m+1)$ unabhängige Gleichungen, ebenso wie die (1), und aus diesen allein entstanden, also ihnen äquivalent; folglich entstehen rückwärts die Gleichungen (1) aus den (6) durch Auflösung nach den Konstanten $a a_1 \ldots a_m$. Da ferner die sämtlichen $2n+2$ Integrale des Systems (2) durch Auflösung nach $y z y' z' \ldots y^n z^n$ die vollständigen Lösungen ergeben, also nach diesen Gröſsen lösbar sein müssen, so müssen auch irgend welche $(m+1)$ Integrale, also auch die ihnen äquivalenten Gleichungen (6) auflösbar sein nach irgend welchen $(m+1)$ von den $(2n+2)$ Gröſsen $y z y' z' \ldots y^n z^n$.

Hierauf beruht die Beantwortung der zweiten Frage. Es ist unschwer zu zeigen: *Man muſs* $(m+1)$ *Integrale von der Form* (1) *erhalten, wenn man sich zwei beliebige unabhängige Gleichungen bildet*

$$\Pi = 0, \qquad \Pi_1 = 0$$

von der Natur der (5) *und mit* $(m+1)$ *willkürlichen Konstanten*

$$a, a_1 \ldots a_m,$$

also im Fall ungerader m:

$$(5^\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi\left(x y z y' z' \ldots y^{n-\frac{m-1}{2}} z^{n-\frac{m-1}{2}} a a_1 \ldots a_m\right) = 0 \\ \Pi_1\left(x y z y' z' \ldots y^{n-\frac{m-1}{2}} z^{n-\frac{m-1}{2}} a a_1 \ldots a_m\right) = 0 \end{array}\right.$$

und für gerade m:

$$(5^\beta)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi\left(x y z \ldots y^{n-\frac{m}{2}} z^{n-\frac{m}{2}} a a_1 \ldots a_m\right) = 0 \\ \Pi_1\left(x y z \ldots y^{n-\frac{m}{2}} z^{n-\frac{m}{2}+1} a a_1 \ldots a_m\right) = 0, \end{array}\right.$$

oder etwas allgemeiner

$$(5^b)\qquad \begin{cases} \Pi\left(xyz\ldots y^{n-\frac{m}{2}} z^{n-\frac{m}{2}} aa_1\ldots a_m\right)=0 \\ \Pi_2\left(xyz\ldots y^{n-\frac{m}{2}+1} z^{n-\frac{m}{2}+1} aa_1\ldots a_m\right)=0 \end{cases}$$

(so dafs Π_1 nur als ein specielles, nämlich von $y^{n-\frac{m}{2}+1}$ freies Π_2 erscheint*)).

Sobald nun die mit diesen Gleichungen (5^α) *resp.* (5^b) *gebildeten Systeme*

$$(6^\alpha)\qquad \begin{cases} \Pi=0 \quad \Pi'=0\ldots \Pi^{\frac{m-1}{2}}=0 \\ \Pi_1=0 \quad \Pi_1'=0\ldots \Pi_1^{\frac{m-1}{2}}=0 \end{cases}$$

$$\text{resp. } (6^b)\qquad \begin{cases} \Pi=0 \quad \Pi'=0\ldots \Pi^{\frac{m}{2}}=0 \\ \Pi_2=0 \quad \Pi_2'=0\ldots \Pi_2^{\frac{m}{2}-1}=0 \end{cases}$$

(in (6^β) nur Π_2 für Π_1 gesetzt) *auflösbar sind einerseits nach irgend welchen* $(m+1)$ *von den abhängigen Variabeln* $yzy'z'\ldots y^n z^n$, *andrerseits nach den Konstanten* $aa_1\ldots a_m$, *so sind diese Auflösungen:*

$$(1')\qquad a=X,\quad a_1=X_1,\ \ldots\ a_m=X_m$$

$(m+1)$ *unabhängige Integrale von 2 Differentialgleichungen* $(n+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung*

$$(2')\qquad y^{n+1}=Y,\qquad z^{n+1}=Z.$$

Diese allgemeinste Fassung des Satzes läfst sich durch Wahl des m dahin specialisieren, dafs man bei ungeradem m beide Gleichungen (5), bei geradem m die erste derselben endlich werden läfst. Im ersten Fall gibt $m=2n+1$ den Satz:

Bildet man zwei unabhängige Gleichungen

$$\Pi(xyzaa_1\ldots a_{2n+1})=0,\qquad \Pi_1(xyzaa_1\ldots a_{2n+1})=0$$

---

*) Anmerkung. Dafs die Wahl eines $y^{n-\frac{m}{2}+1}$ enthaltenden Π_2 an der Sachlage nichts ändert, erhellt daraus, dafs aus den gegebenen Integralen durch Elimination von $y^n z^n\ldots y^{n-\frac{m}{2}+2}, z^{n-\frac{m}{2}+2}$ zunächst drei Gleichungen mit

$$xyzy'z'\ldots y^{n-\frac{m}{2}+1},\ z^{n-\frac{m}{2}+1}$$

entstehen. Die Elimination von $y^{n-\frac{m}{2}+1}$ und $z^{n-\frac{m}{2}+1}$ ergab sodann $\Pi=0$, die von $y^{n-\frac{m}{2}+1}$ aus zweien gab $\Pi_1=0$; eine beliebige obiger drei Gleichungen stellt jenes $\Pi_2=0$ dar, welches für unsre weiteren speciellen Konsequenzen $\Pi_1=0$ ersetzen kann.

zwischen xyz und $(2n+2)$ *Konstanten derart, daſs die daraus durch Differentiation gebildeten Gleichungen*

$$\Pi = 0 \quad \Pi' = 0 \ldots \Pi^n = 0; \qquad \Pi_1 = 0 \quad \Pi_1' = 0 \ldots \Pi_1^n = 0$$

auflösbar sind einerseits nach $y z y' z' \ldots y^n z^n$, *andrerseits nach* $a a_1 \ldots \ldots a_{2n+1}$, *so sind diese letzteren Auflösungen die sämtlichen* $(2n+2)$ *unabhängigen Integrale zweier Differentialgleichungen* $(n+1)^{ter}$ *Ordnung.*

Im Fall m gerade ergibt $m = 2n$ den Satz:

Bildet man zwei unabhängige Gleichungen zwischen $xyzy'z'$ *und nur* $2n+1$ *Konstanten:*

$$\Pi(xyzaa_1 \ldots a_{2n}) = 0, \qquad \Pi_2(xyzy'z'aa_1 \ldots a_{2n}) = 0,$$

derart, daſs die $(2n+1)$ *Gleichungen:*

$$\Pi = 0, \ \Pi' = 0 \ldots \Pi^n = 0; \qquad \Pi_2 = 0, \ \Pi_2' = 0 \ldots \Pi_2^{n-1} = 0$$

auflösbar sind nach $(2n+1)$ *von den* $(2n+2)$ *Gröſsen* $yzy'z' \ldots y^n z^n$ *und ebenso nach den Konstanten* $aa_1 \ldots a_{2n}$, *so sind die letztern Auflösungen* $(2n+1)$ *von den* $(2n+2)$ *Integralen zweier Differentialgleichungen* $(n+1)^{ter}$ *Ordnung.*

Wir beweisen jetzt die vorangestellte allgemeinste Fassung des Satzes, zunächst für ungerade m.

Bezeichnet die runde Klammer () die Substitution der Gleichungen (1′), der Auflösungen der (6^a), so geben letztere die Identitäten

$$(7) \quad \begin{cases} (\Pi) \equiv 0, \quad (\Pi') \equiv 0 \ldots \left(\Pi^{\frac{m-3}{2}}\right) \equiv 0, \quad \left(\Pi^{\frac{m-1}{2}}\right) \equiv 0 \\ (\Pi_1) \equiv 0 \quad (\Pi_1') \equiv 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\Pi_1^{\frac{m-1}{2}}\right) \equiv 0, \end{cases}$$

worin also z. B. bedeutet:

$$(\Pi) \equiv \Pi\left(xyzy'z' \ldots y^{n-\frac{m-1}{2}}, z^{n-\frac{m-1}{2}}, X, X_1 \ldots X_m\right).$$

Differenziert man die Identitäten (mit Ausnahme der letzten in jeder Reihe) vollständig nach x, so entstehen:

$$\frac{d(\Pi)}{dx} \equiv (\Pi') + \sum_0^m{}_h \frac{\partial(\Pi)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0$$

$$\frac{d(\Pi')}{dx} \equiv (\Pi'') + \sum_0^m{}_h \frac{\partial(\Pi')}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\left(\Pi^{\frac{m-3}{2}}\right)}{dx} \equiv \left(\Pi^{\frac{m-1}{2}}\right) + \sum_0^m{}_h \frac{\partial\left(\Pi^{\frac{m-3}{2}}\right)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0.$$

Π_1 liefert $\frac{m-1}{2}$ analoge Gleichungen. Diese $(m-1)$ Identitäten reducieren sich durch die Gleichungen (7) auf die folgenden:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_0^m {}_h \frac{\partial(\Pi)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0; & \sum_0^m {}_h \frac{\partial(\Pi_1)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0 \\ \sum_0^m {}_h \frac{\partial(\Pi')}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0; & \sum_0^m {}_h \frac{\partial(\Pi_1')}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \sum_0^m {}_h \frac{\partial\left(\Pi^{\frac{m-3}{2}}\right)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0; & \sum_0^m {}_h \frac{\partial\left(\Pi_1^{\frac{m-3}{2}}\right)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0. \end{cases}$$

Diese $(m-1)$ Identitäten sind linear und homogen bezüglich der $(m+1)$ Gröſsen $\frac{dX_h}{dx}$. Eliminiert man deren $(m-2)$, etwa

$$\frac{dX}{dx}, \quad \frac{dX_1}{dx} \cdots \frac{dX_{i-1}}{dx}, \quad \frac{dX_{i+3}}{dx} \cdots \frac{dX_m}{dx},$$

so erhält man eine gleichfalls identische lineare homogene Relation von der Form

$$\lambda \frac{dX_i}{dx} + \lambda_1 \cdot \frac{dX_{i+1}}{dx} + \lambda_2 \cdot \frac{dX_{i+2}}{dx} \equiv 0,$$

in welcher im allgemeinen nicht anzunehmen ist, daſs eines der λ identisch gleich Null sei; jedenfalls läſst sich durch geeignete rein algebraische Umgestaltung der Π, Π_1 erzielen, daſs dieser besondre Fall nicht eintritt. Dann zeigt aber diese Identität, daſs identisch jedes beliebige $\frac{dX_i}{dx} \equiv 0$ wird durch diejenigen Werte von y^{n+1} und z^{n+1}, die sich aus

$$\frac{dX_{i+1}}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dX_{i+2}}{dx} = 0$$

ergeben, allerdings vorausgesetzt, daſs man in X_{i+1} und X_{i+2} nicht gerade solche von den $(m+1)$ Funktionen X_h genommen hat, die beide frei sind von derselben der beiden Gröſsen y^n und z^n. Damit ist aber nach dem früher abgeleiteten Kriterium gezeigt, daſs

$$X_i = a_i, \quad X_{i+1} = a_{i+1}, \quad X_{i+2} = a_{i+2}$$

(für jedes $i = 0\ 1\ 2 \ldots m-2$) Integrale sind derselben beiden Differentialgleichungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(2')$. Für gerade m ist der Beweis völlig analog. — Sind nun die gegebenen Integrale (1) nicht, wie wir annahmen, gerade unabhängig bezüglich gleich hoher Differentialquotienten von y und z, findet also irgend welche Abhängigkeit statt bezüglich einer Reihe höherer Differentialquotienten, so gestaltet sich das Eliminationsresultat etwas anders; man erhält eventuell eine der beiden Gleichungen (5) von weit niederer Ordnung als die andre.

Bezeichnet man aber für den Augenblick die Ordnung einer Gleichung nach derjenigen des höchsten darin vorkommenden Differentialquotienten, sei es von y oder von z, so ist doch so viel sicher, dafs die Summe beider Ordnungen immer $2n - m + 1$ beträgt. Ergibt sich z. B. Π von der Ordnung $n - \varkappa$, so mufs sich Π_1 von der Ordnung $n - (m - \varkappa - 1)$ ergeben, denn es müssen

$$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \ldots \Pi^{\varkappa} = 0; \quad \Pi_1 = 0 \quad \Pi_1{}' = 0 \ldots \Pi_1{}^{m-\varkappa-1} = 0$$

$(m + 1)$ Gleichungen sein, weil ihre Auflösung rückwärts jene $m + 1$ Integrale ergeben mufs. Ein Grenzfall dieser Art tritt ein, sobald eine der Differentialgleichungen (2′) die eine Variable gar nicht enthält, etwa:

$$y^{n+1} = Y(xyy' \ldots y^n); \qquad z^{n+1} = Z(xyz \ldots y^n z^n).$$

Im Falle $Y \equiv 0$, wenn also die Differentialgleichungen lauten:

$$y^{n+1} = 0; \qquad z^{n+1} = Z,$$

erhält man aus der ersten sofort $(n + 1)$ von z freie Integrale und somit eine endliche vollständige Integralgleichung

$$y = a \cdot \frac{x^n}{n!} + a_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + a_{n-1} \cdot x + a_n,$$

welche hier jene Gleichung $\Pi = 0$ darstellt. Dieselbe ist von der 0ten Ordnung, d. h. endlich. Die Integrale sind äquivalent den Gleichungen

$$\Pi = 0 \qquad \Pi' = 0 \; . \; . \; . \; \Pi^n = 0;$$

die andre Gleichung $\Pi_1 = 0$, die in diesem Grenzfall nicht aus den gegebenen Integralen resultiert, weil diese frei von z waren, ist dargestellt durch die zweite Differentialgleichung $z^{n+1} = Z$ selbst, nachdem man in dieser für $yy' \ldots y^n$ die gefundnen Werte gesetzt hat. Ihre Ordnung bleibt dabei $n + 1$; die Summe der Ordnungen von Π und Π_1 ist also hier $0 + n + 1 = n + 1$, was mit der obigen Bemerkung übereinstimmt, da hier $m = n$, also $2n - m + 1 = n + 1$ wird. — Welcher Art aber die Gleichungen (5) auch ausfallen mögen, immer bilden sie das System, auf welches die Integration des ursprünglichen Systems (2′) durch die Integrale (1.) zurückgeführt wird; und die letztern, verbunden mit den $2n - m + 1$ Integralen dieses reducierten Systems (5), liefern, gelöst nach $yzy'z' \ldots y^n z^n$, die vollständigen Lösungen y, z der Differentialgleichungen (2) mit $2n + 2$ Konstanten oder geben, durch Elimination von $y'z' \ldots y^n z^n$, die beiden endlichen vollständigen Integralgleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} f(xyzaa_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n+1}) = 0 \\ \varphi(xyzaa_1 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n+1}) = 0. \end{cases}$$

§ 2. Die vollständigen und singulären Lösungen.

Nach Erledigung dieser Vorfragen kommen wir zur eigentlichen Aufgabe. Mit jenen $(m+1)$ Integralen (1) sind die beiden unabhängigen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung gebildet:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} F(XX_1X_2 \ldots X_m) = 0 \\ \Phi(XX_1X_2 \ldots X_m) = 0. \end{cases}$$

Man hat übrigens dabei $m > 1$ zu denken, denn der Fall $m = 1$, $F(XX_1) = 0$, $\Phi(XX_1) = 0$, entspricht jedem beliebigen Paar Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung

$$F(xyzy'z' \ldots y^n z^n) = 0, \qquad \Phi(xyz \ldots y^n z^n) = 0,$$

denn da sind immer $F = a$, $\Phi = a_1$ zwei unabhängige Integrale zweier unabhängigen Differentialgleichungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dx} = 0. \text{ —}$$

Die vollständigen Lösungen der (A) sind evident; denn (9), die Integralgleichungen der Differentialgleichungen (2), verwandeln durch ihre Substitution jedes Integral X_i in die entsprechende Konstante a_i, verwandeln also (A) in die Gleichungen:

$$\text{(10)} \qquad F(aa_1 \ldots a_m) = 0; \qquad \Phi(aa_1 \ldots a_m) = 0.$$

Man hat also nur noch diese (10) zu erfüllen, um durch (9) die (A) erfüllt zu haben; somit stellen die Gleichungen (9) und (10) zusammen die vollständigen Integralgleichungen der (A) dar und enthalten infolge der (10) nur noch die notwendigen $2n$ Konstanten. Sind jene Integralgleichungen (9) nicht bekannt, so erhält man die vollständigen Lösungen der (A) durch Integration des Systems, welches in § 1 besprochen wurde:

$$\text{(5)} \qquad \Pi = 0, \qquad \Pi_1 = 0$$

in Verbindung mit (10).

Wir wenden uns nun zu den singulären Lösungen. Serret gibt zu deren Auffindung nur eine Methode an und lässt die Ordnung der dabei entstehenden Gleichungen, somit die Anzahl der in den singulären Lösungen enthaltnen willkürlichen Konstanten unberücksichtigt. Wir wollen diesen Punkt erörtern und drei Methoden zur Auffindung der singulären Lösungen aufstellen.

Die *erste Methode* ist die der Integration durch Differentiation. Sie ist in praxi die unbrauchbarste, in der Theorie aber die klarste und kürzeste, somit am geeignetsten, um die Natur des Problems festzustellen. — Ein jedes Paar Lösungen y, z, welches unsre Differentialgleichungen (A) erfüllt, erfüllt auch die vollständig differenzierten:

$$\frac{dF}{dx} \equiv \sum_0^m {}_h \frac{\partial F}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dx} \equiv \sum_0^m {}_h \frac{\partial \Phi}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} = 0.$$

Infolge der frühern Gleichung (3) aus § 1 geht aber die erste Gleichung über in

$$(y^{n+1} - Y) \sum_0^m {}_h \frac{\partial F}{\partial X_h} \cdot \frac{\partial X_h}{\partial y^n} + (z^{n+1} - Z) \sum_0^m {}_h \frac{\partial F}{\partial X_h} \cdot \frac{\partial X_h}{\partial z^n} = 0$$

oder: $$(y^{n+1} - Y) \frac{\partial F}{\partial y^n} + (z^{n+1} - Z) \cdot \frac{\partial F}{\partial z^n} = 0$$

und die zweite ebenso in

$$(y^{n+1} - Y) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y^n} + (z^{n+1} - Z) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z^n} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen können zusammen bestehen entweder durch

$$y^{n+1} - Y = 0, \qquad z^{n+1} - Z = 0,$$

also durch Erfüllung der anfangs betrachteten Differentialgleichungen (2′), dann kommen wir auf die schon diskutierten vollständigen Lösungen; oder durch das Verschwinden der Determinante

(11) $$D \equiv \frac{\partial F}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z^n} - \frac{\partial F}{\partial z^n} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y^n} = 0.$$

Dies kann keine bloſse Identität sein; denn einerseits haben wir vorausgesetzt, daſs nicht alle $(m+1)$ Integrale frei sind etwa von z^n (wodurch ja $D \equiv 0$ würde); und andrerseits setzen wir die (A) als unabhängige Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung voraus, haben sie also nach y^n z^n lösbar zu denken (im Gegensatz zur ersten Klasse Serret's). Da die Gleichung (11) selbst im allgemeinen y^n, z^n enthält, so haben die singulären Lösungen also drei Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung zu erfüllen, nämlich (A) und (11):

(12) $$F = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad D = 0,$$

sie erfüllen also auch zwei Gleichungen, die durch Elimination etwa von z^n entstehen:

(12^α) $$\begin{cases} \mathfrak{F}(xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-1}y^n) = 0 \\ \mathfrak{F}_1(xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-1}y^n) = 0 \end{cases}$$

oder, aufgelöst nach y^n und z^{n-1}:

$$y^n = \mathfrak{Y}(xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-2}); \qquad z^{n-1} = \mathfrak{Z}(xyz \ldots y^{n-1}z^{n-2}).$$

Die vollständige Integration würde also die singulären Lösungen ergeben mit $(2n-1)$ willkürlichen Konstanten. Diese Maximalzahl wird jedoch nur dann erreicht, wenn man aus den Gleichungen (12) nur die eine Gröſse z^n (oder y^n) eliminieren kann. Man kann jedoch

niemals durch Elimination von y^n und z^n aus den (12) zwei Gleichungen erhalten, so lange die (A) selbst unabhängig sind, also nicht identisch $D \equiv 0$ ist. Wohl aber können die (12) z. B. die Elimination einer Reihe von $z^n z^{n-1} \ldots z^{i+1}$ zulassen und ergeben

$$\mathfrak{F}(xyz \ldots y^n z^i) = 0, \qquad \mathfrak{F}_1(xyz \ldots y^n z^i) = 0, \qquad 0 < i < n.$$

Dieser Fall tritt ein, sobald D frei ist von y^n und z^n, wenn also F und Φ beide linear sind bezüglich y^n sowohl wie z^n und somit etwa die Form haben:

$$F \equiv f_1 + y^n \cdot f_2 + z^n \cdot f_3; \qquad \Phi \equiv f_4 + y^n \cdot f_5 + z^n \cdot f_6,$$

wo $f_1 f_2 \ldots f_6$ höchstens y^{n-1} und z^{n-1} enthalten. Enthalten sie jedoch und enthält damit

$$D \equiv f_2 \cdot f_6 - f_3 \cdot f_5$$

höchstens z^{i+1} und y^k $(i + 1 \geq k)$, so bestimmen sich durch $D = 0$ die Gröfsen z^{i+1}, $z^{i+2} \ldots z^n$ als Funktionen der z, $z' \ldots z^i$ und der Ableitungen von y bis höchstens ebenfalls zur n^{ten}; die Substitution der so erhaltenen Werte in die (A) liefert also, wie oben aufgestellt, ein System $(n + i)^{\text{ter}}$ Ordnung. — Ausserdem kann das System (12^{α}) seinerseits wieder verschiedne singuläre Lösungen mit höchstens $2n - 2$ Konstanten besitzen; diese sind dann ebenfalls singuläre Lösungen des Systems (A), nur von geringerer Allgemeinheit.

Wir wenden uns zur *zweiten Methode*, der, welche Serret andeutet. Jedes Lösungspaar y, z, welches

(A) $$F(XX_1 \ldots X_m) = 0, \qquad \Phi(XX_1 \ldots X_m) = 0$$

erfüllt, kann man auch so definieren: es soll erfüllen die $(m + 3)$ Gleichungen

(1) $$X = a, \quad X_1 = a_1, \quad \ldots \quad X_m = a_m$$ und

(10) $$F(aa_1 \ldots a_m) = 0, \qquad \Phi(aa_1 \ldots a_m) = 0.$$

Wir fanden aber, dafs die Gleichungen (1) äquivalent waren den Gleichungen (im Fall m ungerade):

(6) $$\begin{cases} \Pi = 0, & \Pi' = 0, \quad \ldots \quad \Pi^{\frac{m-1}{2}} = 0, \\ \Pi_1 = 0, & \Pi_1' = 0, \quad \ldots \quad \Pi_1^{\frac{m-1}{2}} = 0, \end{cases}$$

also mufs jedes Lösungspaar lediglich erfüllen (6) und (10). Die (6) entstanden aber durch $\frac{m-1}{2}$ malige vollständige Differentiation der Gleichungen

(5) $$\Pi = 0, \qquad \Pi_1 = 0$$

nach x. Wenn wir nun, da wir durch konstante a, $a_1 \ldots a_m$ auf die

vollständigen Lösungen kamen, jetzt diese Gleichungen durch variable a erfüllen wollen, indem wir dieselben als Funktionen von x betrachten, so müssen nach wie vor die Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} \Pi = 0, \quad D_x\Pi = 0, \quad D_x^2\Pi = 0 \ldots D_x^{\frac{m-1}{2}}\Pi = 0 \\ \Pi_1 = 0, \quad D_x\Pi_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad D_x^{\frac{m-1}{2}}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

(wo D die vollständige Differentiation, auch hinsichtlich der a, bedeutet) die (1) zu Auflösungen haben. Das können sie nur, wenn sie mit den (6) zusammenfallen, denn diese letztern haben eben jene Auflösungen. Bezeichnet nun d, oder auch wie bisher ein oberer Index, immer die Differentiation der xyz und ihrer Ableitungen nach x, dagegen δ die Differentiation der $aa_1 \ldots a_m$ allein, also z. B.

$$D_x F(xyzy'z' \ldots y^i z^i aa_1 \ldots a_m) \equiv \frac{dF}{dx} + \frac{\delta F}{\delta x},$$

worin

$$\frac{dF}{dx} \equiv F' \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + z' \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + \cdots + y^{i+1}\frac{\partial F}{\partial y^i} + z^{i+1}\frac{\partial F}{\partial z^i}$$

und

$$\frac{\delta F}{\delta x} \equiv \sum_0^m{}_h \frac{\partial F}{\partial a_h} \cdot \frac{da_h}{dx},$$

so ist nun

$$D_x\Pi \equiv \Pi' + \frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0.$$

Damit diese Gleichung mit der entsprechenden $\Pi' = 0$ zusammenfällt, mufs $\frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0$ sein. Ist dies erfüllt, so geht

$$D_x^2\Pi \equiv D_x(D_x\Pi) = 0 \quad \text{über in} \quad D_x\Pi' = 0$$

und dann ist zum Zusammenfallen des nächsten Paares nur noch notwendig, dafs

$$D_x\Pi' \equiv \Pi'' + \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0 \quad \text{sei.}$$

So geht dies weiter; wir erhalten die $(m-1)$ Bedingungen für ungerade m (indem wir der Kürze halber die Nenner δx der Differentialquotienten weglassen):

$$(14^\alpha)\quad \begin{cases} \delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi' = 0 \ \ldots\ \delta\Pi^{\frac{m-3}{2}} = 0 \\ \delta\Pi_1 = 0, \quad \delta\Pi_1' = 0 \ \ldots\ \delta\Pi_1^{\frac{m-3}{2}} = 0 \end{cases}$$

und ebenso für geradzahlige m:

$$(14^\beta)\quad \begin{cases} \delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi' = 0 \ \ldots\ \delta\Pi^{\frac{m}{2}-1} = 0 \\ \delta\Pi_1 = 0, \quad \delta\Pi_1' = 0 \ \ldots\ \delta\Pi_1^{\frac{m}{2}-2} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind linear und homogen in Bezug auf

$$\frac{da}{dx}, \quad \frac{da_1}{dx} \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dx}.$$

Somit haben die singulären Lösungen y, z und die unbekannten Funktionen $a, a_1 \ldots a_m$ zu erfüllen die $(m+3)$ Gleichungen:

(5), (10) und (14^α) resp. (14^β),

womit sich Serret begnügt. Sie erfüllen aber neben den (5) oder den beiden ersten Gleichungen (6) auch die übrigen Gleichungen (6), von denen wir jedoch nur die $(m-1)$ ersten benutzen wollen, um nicht y^n und z^n einzuführen, die nur in den beiden letzten (6) vorkommen. Ferner wollen wir etwa a und a_1 aus den Gleichungen (10) als Funktionen der $a_2\, a_3 \ldots a_m$ berechnet, daraus $\frac{da}{dx}$ und $\frac{da_1}{dx}$ gebildet und diese vier Werte eingesetzt denken in alle übrigen Gleichungen. Wir wollen diese Substitution nicht weiter äufserlich markieren und nur beachten, dafs die (14) auch dann noch linear und homogen bleiben bezüglich $\frac{da_2}{dx}, \frac{da_3}{dx} \ldots \frac{da_m}{dx}$, also von der Form sind:

$$\alpha_2 \frac{da_2}{dx} + \alpha_3 \frac{da_3}{dx} + \cdots + \alpha_m \frac{da_m}{dx} = 0,$$

wo die $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ Funktionen sind von $a_2 \ldots a_m x y z y' z' \ldots y^{n-1} z^{n-1}$. Alsdann lauten im Falle ungerader m die zu erfüllenden Gleichungen:

$$(6') \quad \begin{cases} \Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \quad \ldots \quad \Pi^{\frac{m-3}{2}} = 0 \\ \Pi_1 = 0, \quad \Pi_1' = 0 \quad \ldots \quad \Pi_1^{\frac{m-3}{2}} = 0. \end{cases}$$

$$(14^\alpha) \quad \begin{cases} \delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi' = 0 \quad \ldots \quad \delta\Pi^{\frac{m-3}{2}} = 0 \\ \delta\Pi_1 = 0, \quad \delta\Pi_1' = 0 \quad \ldots \quad \delta\Pi_1^{\frac{m-3}{2}} = 0. \end{cases}$$

Sie enthalten die Gröfsen:

$$xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-1}, \quad a_2 a_3 \ldots a_m \frac{da_2}{dx} \ldots \frac{da_m}{dx}.$$

Da die $\frac{da_2}{dx} \ldots \frac{da_m}{dx}$ nicht sämtlich verschwinden sollen, mufs die Determinante der $(m-1)$ homogenen Gleichungen (14^α) verschwinden. Sie sei angedeutet durch

$$\Delta(xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-1}, \quad a_2 a_3 \ldots a_m) = 0,$$

wobei sich die (14^α) auf etwa die $(m-2)$ ersten reducieren. Löst man die m Gleichungen ($6'$) und $\Delta = 0$ nach

$$a_2, \quad y^{n-1}z^{n-1} \ldots y^{n-\frac{m-1}{2}}, \quad z^{n-\frac{m-1}{2}},$$

wobei

$$(15)\quad \begin{cases} y^{n-\frac{m-1}{2}} = \mathfrak{Y}\left(xyz\ldots y^{n-\frac{m-3}{2}} z^{n-\frac{m-3}{2}} a_3 a_4 \ldots a_m\right) \\ z^{n-\frac{m-1}{2}} = \mathfrak{Z}\left(xyz\ldots z^{n-\frac{m-3}{2}} z^{n-\frac{m-3}{2}} a_3 \ldots a_m\right) \end{cases}$$

die Werte seien, die sich dabei für diese Gröfsen ergeben, und setzt man diese Werte sämtlich in die noch übrigen $(m-2)$ von den (14^α), nachdem man auch $\frac{d a_2}{dx}$ als Funktion derselben Gröfsen durch Differentiation des eben gefundenen a_2 berechnet hat, so hat man $(m-2)$ Gleichungen mit

$$xyzy'z'\ldots y^{n-\frac{m-3}{2}} z^{n-\frac{m-3}{2}},\quad a_3\ldots a_m,\quad \frac{da_3}{dx}\ldots\frac{da_m}{dx}.$$

Fügt man hinzu die beiden Differentialgleichungen $\left(n-\frac{m-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung (15), oder die ihnen äquivalenten $2\left(n-\frac{m-1}{2}\right) = 2n-m+1$ Differentialgleichungen erster Ordnung, so hat man $(2n-1)$ Differentialgleichungen erster Ordnung mit den $(2n-1)$ abhängigen Variabeln

$$a_3\ldots a_m \quad yzy'z'\ldots y^{n-\frac{m-3}{2}},\quad z^{n-\frac{m-3}{2}}.$$

Die bei der vollständigen Integration sich ergebenden Werte von y und z als Funktionen von x und $(2n-1)$ Konstanten sind dann die gesuchten singulären Lösungen. Zu demselben Resultat führt die analoge Behandlung für gerade m. Dann sind nur $(6')$ und (14^α) zu ersetzen durch

$$(6'')\quad \begin{cases} \Pi = 0,\quad \Pi' = 0\ \ldots\ \Pi^{\frac{m}{2}-1} = 0 \\ \Pi_1 = 0,\quad \Pi_1' = 0\ \ldots\ \Pi_1^{\frac{m}{2}-2} = 0 \end{cases}$$

(bei $m = 2$ ist von der zweiten Reihe natürlich $\Pi_1 = 0$ selbst beizubehalten) und

$$(14^\beta)\quad \begin{cases} \delta\Pi = 0,\quad \delta\Pi' = 0\ \ldots\ \delta\Pi^{\frac{m}{2}-1} = 0 \\ \delta\Pi_1 = 0,\quad \delta\Pi_1' = 0\ \ldots\ \delta\Pi_1^{\frac{m}{2}-2} = 0. \end{cases}$$

Die letzteren reducieren sich wieder auf die $(m-2)$ ersten und die Determinante

$$\Delta_1(xyzy'z'\ldots y^{n-1}z^{n-1}\,a_2\ldots a_m) = 0.$$

Aus den m Gleichungen $(6'')$ und $\Delta_1 = 0$ berechnet man

$$a_2 y^{n-1} z^{n-1}\ldots y^{n-\frac{m}{2}},\quad z^{n-\frac{m}{2}+1},$$ wobei sich

$$(15')\qquad \begin{cases} y^{n-\frac{m}{2}} = \mathfrak{Y}_1\left(xyz\ldots y^{n-\frac{m}{2}-1} z^{n-\frac{m}{2}} a_3\ldots a_m\right) \\ z^{n-\frac{m}{2}+1} = \mathfrak{Z}_1\left(xyz\ldots y^{n-\frac{m}{2}-1} z^{n-\frac{m}{2}} a_3\ldots a_m\right) \end{cases}$$

ergeben mögen. Durch Substitution obiger Werte gehen die $(m-2)$ ersten Gleichungen (14^β) über in Gleichungen zwischen

$$xyz\ldots y^{n-\frac{m}{2}-1} z^{n-\frac{m}{2}} a_3\ldots m_m \frac{da_3}{dx}\cdots\frac{da_m}{dx};$$

man hat also mit den (15′), welche $(2n-m+1)$ Differentialgleichungen erster Ordnung repräsentieren, $(2n-1)$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $(2n-1)$ abhängigen Variabeln

$$yzy'z'\ldots y^{n-\frac{m}{2}-1},\quad z^{n-\frac{m}{2}},\quad a_3\ldots a_m,$$

erhält also wie vorhin $y(x)$ und $z(x)$ mit $(2n-1)$ Konstanten.

In speciellen Fällen treten wesentliche Reductionen ein, so z. B. wenn die obige Auflösung nach a_2 ergibt $a_2 = A_2(a_3\ldots a_m)$, als bloſse Funktion der $a_3\ldots a_m$, nicht auch der $xyzy'z'\ldots$; dann kann man die $(m-2)$ übrig bleibenden (14^α) so schreiben (indem man beachtet, daſs a und a_1 schon früher durch die Gleichungen (10) entfernt waren):

$$\sum_3^m{}_h \left(\frac{\partial \Pi^\varkappa}{\partial a_h} + \frac{\partial \Pi^\varkappa}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial a_h}\right)\cdot\frac{da_h}{dx} = 0,$$

da

$$\frac{da_2}{dx} = \sum_3^m{}_h \frac{\partial A_2}{\partial a_h}\cdot\frac{da_h}{dx},$$

wo für $\Pi^\varkappa$ der Reihe nach zu setzen sind

$$\Pi\Pi'\ldots\Pi^{\frac{m-3}{2}},\quad \Pi_1,\quad \Pi_1'\ldots\Pi_1^{\frac{m-5}{2}}.$$

Das sind wieder $(m-2)$ homogene Gleichungen bezüglich $\frac{da_3}{dx}\cdots\frac{da_m}{dx}$; also verschwindet auch deren Determinante und liefert ihrerseits auch a_3 ohne Integration, so daſs man schlieſslich eine Konstante weniger erhält. Auf diese und ähnliche Weise kann sich die Anzahl der Konstanten noch weiter verringern. — Auch hier können, wie schon bei der ersten Methode bemerkt wurde, singuläre Lösungen mit höchstens $(2n-2)$ Konstanten existieren, welche gleichfalls singuläre Lösungen des ursprünglichen Systems (A) sind.

Die *dritte Methode* geht von den vollständigen Lösungen oder vollständigen endlichen Integralgleichungen der (2) aus, welche in praxi meist direkt gegeben sind. Sie waren bezeichnet durch

$$(9)\qquad f(xyzaa_1\ldots a_{2n+1}) = 0,\qquad \varphi(xyzaa_1\ldots a_{2n+1}) = 0.$$

Verbunden mit den Gleichungen (10) bilden sie die vollständigen

Lösungen mit $2n$ Konstanten der vorgelegten Differentialgleichungen (A). Diese (A) werden identisch erfüllt durch ihre vollständigen Lösungen und deren n erste Ableitungen, also von

$$(16) \qquad \begin{cases} f = 0, \quad f' = 0, \quad f'' = 0 \ \ldots \ f^n = 0 \\ \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \varphi'' = 0 \ \ldots \ \varphi^n = 0, \end{cases}$$

immer in Verbindung mit den (10). Wir wollen nun in den Gleichungen (9) sämtliche $a a_1 \ldots a_{2n+1}$ als Funktionen von x betrachten. Dann müssen diese Gleichungen mit ihren Ableitungen (jetzt also auch die a differenziert)

$$(17) \qquad \begin{cases} f = 0, \quad D_x f = 0, \quad D_x^2 f = 0 \ldots D_x^n f = 0, \\ \varphi = 0, \quad D_x \varphi = 0, \quad D_x^2 \varphi = 0 \ldots D_x^n \varphi = 0 \end{cases}$$

immer noch die Gleichungen (A) erfüllen. Da dies aber die Gleichungen (16) thun, können es die (17) nur dann, wenn sie mit den (16) zusammenfallen. Damit nun die erste

$$D_x f \equiv f' + \sum_0^{2n+1}{}_h \frac{\partial f}{\partial a_h} \cdot \frac{d a_h}{dx} = 0,$$

mit $f' = 0$ zusammenfällt, mufs

$$\sum_0^{2n+1}{}_h \frac{\partial f}{\partial a_h} \cdot \frac{d a_h}{dx} = 0$$

sein. Ist dies erfüllt, so ist

$$D_x^2 f \equiv D_x f' \equiv f'' + \sum_0^{2n+1}{}_h \frac{\partial f'}{\partial a_h} \cdot \frac{d a_h}{dx} = 0.$$

Zum Zusammenfallen mit $f'' = 0$ mufs also

$$\sum_0^{2n+1}{}_h \frac{\partial f'}{\partial a_h} \cdot \frac{d a_h}{dx} = 0$$

sein. So fortschreitend und ebenso mit der Reihe der φ operierend, gelangt man zu den $2n$ Bedingungen

$$(18) \qquad \sum_0^{2n+1}{}_h \frac{\partial f^i}{\partial a_h} \cdot \frac{d a_h}{dx} = 0; \qquad \sum_0^{2n+1}{}_h \frac{\partial \varphi^i}{\partial a_h} \cdot \frac{d a_h}{dx} = 0$$

$$i = 012 \ldots (n-1).$$

Sollen also die Gleichungen (9) auch bei variabeln $a a_1 \ldots a_m$ immer noch Lösungen der Differentialgleichungen (A), nämlich die singulären, darstellen, so müssen diese singulären Lösungen und die zugehörigen Werte der a den $(4n + 2)$ Bedingungen genügen:

(10), (18) und (16),

von welchen letzteren nur die $2n$ ersten in Betracht kommen und mit (16′) bezeichnet seien:

(16′) $f = 0, \quad f' = 0 \ldots f^{n-1} = 0; \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \ldots \varphi^{n-1} = 0;$

wir lassen $f^n = 0$ und $\varphi^n = 0$ weg, um nicht y^n und z^n aufzunehmen. Vergleicht man nun dieses System von Gleichungen mit dem bei der zweiten Methode erhaltenen (S. 14), so ist ersichtlich, dafs beide zusammenfallen, sobald man in letzterem

$$f = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{an die Stelle von} \quad \Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0$$

treten läfst. In der That sind ja die vollständigen Integralgleichungen nur die speciellen Gleichungen $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, welche auftreten im Fall, dafs man sämtliche Integrale

$$X = a, \quad X_1 = a_1 \ldots X_m = a_m \ldots X_{2n+1} = a_{2n+1}$$

kennt und benutzt, und nicht blos die $(m + 1)$ in den Differentialgleichungen selbst enthaltenen. Somit ist die zweite Methode die allgemeine, die dritte entsteht aus ihr für $m + 1 = 2n + 2$, d. h. $m = (2n + 1)$. Sobald man also neben den in den (A) selbst enthaltenen $(m + 1)$ Integralen auch die übrigen $(2n - m + 1)$ kennt, kann man sowohl die zweite wie die dritte Methode anwenden; beide müssen zum gleichen Resultat führen.

Zur weiteren Behandlung der dritten Methode ist noch einiges zu bemerken. Denkt man durch die (10) etwa a und a_{2n+1} berechnet als Funktionen der übrigen a, daraus $\frac{da}{dx}$ und $\frac{da_{2n+1}}{dx}$ gebildet und diese vier Werte in die $4n$ übrigen Gleichungen eingesetzt, so bleiben die (18) homogen und linear bezüglich der $\frac{da_1}{dx}, \frac{da_2}{dx} \ldots \frac{da_{2n}}{dx}$, reducieren sich also auf die $(2n - 1)$ ersten und ihre Determinante

$$\Delta(xyzy'z' \ldots y^{n-1} z^{n-1}, \quad a_1 a_2 \ldots a_{2n}) = 0.$$

Nun kann man verschieden verfahren.

α) Man löst $\Delta = 0$ und die $2n$ Gleichungen (16′) nach

$$a_{2n} y z y' z' \ldots y^{n-1} z^{n-1}$$

und setzt dies in die übrig gebliebenen $(2n - 1)$ von den (18); dies sind dann $(2n - 1)$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $(2n - 1)$ Funktionen $a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}$ und x, geben also durch vollständige Integration $a_1 \ldots a_{2n-1}$ und damit auch die vorher bestimmten a, a_{2n}, a_{2n+1}, y und z als Funktionen von x und $(2n - 1)$ Konstanten.

β) Löst man $\Delta = 0$ und (16′) nach

$$xyzy'z' \ldots y^{n-1} z^{n-1}$$

und setzt dies in die $(2n-1)$ übrigen (18), welche man, mit $\frac{dx}{da_{2n}}$ multipliziert, so schreiben kann (a und a_{2n+1} sind schon durch (10) entfernt worden):

$$(19)\quad \alpha_1^i \cdot \frac{da_1}{da_{2n}} + \alpha_2^i \cdot \frac{da_2}{da_{2n}} + \ldots + \alpha_{2n-1}^i \cdot \frac{da_{2n-1}}{da_{2n}} + \alpha_{2n}^i = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots (2n-1)$$

(wo die α Funktionen sind von $xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-1}a_1a_2 \ldots a_{2n}$) so hat man $(2n-1)$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannten Funktionen $a_1a_2 \ldots a_{2n-1}$ von a_{2n}. Die bei der Auflösung erhaltenen Werte von xyz sind dann nach der vollständigen Integration jener Differentialgleichungen gegeben als Funktionen des Parameters a_{2n} mit $(2n-1)$ Konstanten. — Man kommt zu demselben Resultat, indem man von vornherein $a_1 \ldots a_{2n-1}$ auffaſst als Funktionen nicht von x, sondern von a_{2n} und dieses erst als Funktion von x.

§ 3. **Beispiel.**

Wir wählen als Beispiel zu dieser Klasse von Differentialgleichungen die Aufgabe, durch welche Serret überhaupt auf solche Differentialgleichungen geführt wurde, welche er aber in der im Eingang citierten Arbeit mit Hilfe geometrischer Eigenschaften löste, ohne Benutzung seiner Methode; wir wollen uns nun streng an diese halten. Es sei

$$F(abc) = 0, \qquad \Phi(abc) = 0$$

gegeben, die Kurve der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve xyz; die letztere wird gesucht. Die zu integrierenden Differentialgleichungen lauten dann:

$$(A)\qquad F(XX_1X_2) = 0, \qquad \Phi(XX_1X_2) = 0,$$

wobei XX_1X_2 als Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts bekanntlich die Werte haben:

$$(I.)\quad \begin{cases} a = X \equiv x - (1 + y'^2 + z'^2)\,\dfrac{y'z'' + z'y''}{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2} \\ b = X_1 \equiv y + (1 + y'^2 + z'^2)\,\dfrac{y'' - z'(y'z'' - z'y'')}{(y'z'' - z''y'')^2 + y''^2 + z''^2} \\ c = X_2 \equiv z + (1 + y'^2 + z'^2)\,\dfrac{z'' + y'(y'z'' - z'y'')}{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2} \end{cases}$$

Dies sind drei Integrale der beiden Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$y''' = \frac{3y''(y'y'' + z'z'')}{1 + y'^2 + z'^2}; \qquad z''' = \frac{3z''(y'y'' + z'z'')}{1 + y'^2 + z'^2},$$

da man findet, dafs

$$\frac{dX}{dx} = 0, \qquad \frac{dX_1}{dx} = 0, \qquad \frac{dX_2}{dx} = 0$$

durch diese Werte von $y''' z'''$ erfüllt werden. Dies wirklich auszuführen ist aber zur Lösung unserer Aufgabe überflüssig; denn man hat obige Werte a, b, c in der Analysis erhalten als Auflösungen der drei Gleichungen zweier benachbarter Normalebenen und der Schmiegungsebene, also von

(1) $$a - x + y'(b - y) + z'(c - z) = 0$$

(2) $$y''(b - y) + z''(c - z) - (1 + y'^2 + z'^2) = 0$$

(3) $$\begin{vmatrix} a - x & b - y & c - z \\ 1 & y' & z' \\ 0 & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

oder $$(a - x)(y'z'' - z'y'') - z''(b - y) + y''(c - z) = 0.$$

Bezeichnet man aber die Gleichung (1) durch $\Pi = 0$, so ist die Gleichung (2) gerade $\Pi' = 0$, und bezeichnet man durch Π_1 die Gleichung

(4) $$\Pi_1 \equiv z''[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2] + (1 + y'^2 + z'^2)[(a - x)z' - (c - z)] = 0,$$

welche entsteht, indem man y'' aus den Gleichungen (2) und (3) eliminiert und zugleich die (1) benutzt, so sind diese

$$\Pi = 0, \qquad \Pi_1 = 0$$

gerade zwei derartige Gleichungen, wie sie in § 1 diskutiert wurden, und zwar für $m = n = 2$. Da aber

(I) $$X = a, \qquad X_1 = b, \qquad X_2 = c$$

wie von den Gleichungen (1) (2) (3), so auch von den daraus gebildeten

$$(1)\ \Pi = 0, \qquad (2)\ \Pi' = 0, \qquad (4)\ \Pi_1 = 0$$

die Auflösungen sind, so ist nach dem dort erbrachten Beweise unmittelbar evident, dafs die (I) Integrale sind von irgend zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung, die man gar nicht braucht. Man erhält jedoch ihre vollständigen Integralgleichungen, indem man das System $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ integriert, in der Form

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = \varrho^2$$
$$m(a - x) + n(b - y) + c - z = 0.$$

Man hat damit auch die vorgelegten Differentialgleichungen (A) integriert, indem man hinzufügt:

$$F(abc) = 0, \qquad \Phi(abc) = 0,$$

wodurch sich die sechs willkürlichen Konstanten $a\,b\,c\,m\,n\,\varrho$ auf die nötigen vier reducieren.

Man sieht, diese vollständigen Lösungen sind evident; es sind alle Kreise, deren Centren (abc) auf der gegebenen Kurve liegen, dargestellt als Schnitte einer Kugel mit beliebigem Radius ϱ und einer Ebene mit beliebiger Neigung (m, n), die nur durch das Kugelcentrum geht. Die gesuchten Lösungen können also nur die singulären sein. Zu deren Auffindung ist unsre erste Methode nur dann brauchbar, wenn die Funktionen F, Φ wirklich gegeben sind; dagegen gestatten die beiden andern Methoden eine allgemeinere Durchführung. Nach der zweiten Methode, ausgehend von den Gleichungen $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$. haben die singulären Lösungen zu erfüllen die fünf Gleichungen:

(5) $$F(abc) = 0, \qquad (6)\ \Phi(abc) = 0,$$

(1) $$\Pi \equiv a - x + y'(b - y) + z'(c - z) = 0,$$

(4) $$\Pi_1 \equiv z''[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2] + (1 + y'^2 + z'^2)\,[(a - x)z' - (c - z)] = 0,$$

(7) $$\delta\Pi \equiv \frac{da}{dx} + y'\frac{db}{dx} + z'\frac{dc}{dx} = 0.$$

Sind die Gleichungen (5) und (6) nicht lösbar nach b und c, so differenziert man beide vollständig nach x:

$$F_a'\frac{da}{dx} + F_b'\frac{db}{dx} + F_c'\frac{dc}{dx} = 0$$

$$\Phi_a'\frac{da}{dx} + \Phi_b'\frac{db}{dx} + \Phi_c'\frac{dc}{dx} = 0$$

und erhält durch Verbindung mit Gleichung (7) die Determinante

(8) $$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' \\ F_a' & F_b' & F_c' \\ \Phi_a' & \Phi_b' & \Phi_c' \end{vmatrix} = 0,$$

hat also abc aus den Gleichungen (5) (6) (1) (4) (8) zu eliminieren und gelangt zu zwei Gleichungen mit $xyzy'z'z''$ allein, deren Auflösung nach $y'\,z''$ das zu integrierende System dritter Ordnung ergibt. Während wir dasselbe jetzt nur andeuten können, vermögen wir es explicite darzustellen, sobald wir annehmen, dafs die gegebenen Differentialgleichungen nach X_1 und X_2 lösbar seien, also die gegebenen Kurvengleichungen die Form

$$b = \varphi(a), \qquad c = \psi(a)$$

besitzen. Dann setzt man diese Werte in die drei übrigen Gleichungen ein und erhält das System

$$\begin{cases} a - x + y'(\varphi - y) + z'(\psi - z) = 0 \\ 1 + y' \dfrac{d\varphi}{da} + z' \dfrac{d\psi}{da} = 0 \\ z''[(a-x)^2 + (\varphi - y)^2 + (\psi - z)^2] \\ + (1 + y'^2 + z'^2)[(a-x)z' - (\psi - z)] = 0. \end{cases}$$

Anstatt nun, wie vorhin, a zu eliminieren, was bei allgemeinen Bezeichnungen φ, ψ nicht ausführbar ist, löst man das System nach y', z', z'' und erhält etwa $y' = \Theta_1$, $z' = \Theta_2$, $z'' = \Theta_3$, wo $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$ gewisse Funktionen von $xyza$ sind. Wählt man nun a als unabhängige Variable, so ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \Theta_1, \quad \text{ebenso} \quad z' = \frac{dz}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \Theta_2$$

und $$z'' = \frac{dz'}{dx} = \frac{d\Theta_2}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \Theta_3, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{da} = \frac{1}{\Theta_3} \cdot \frac{d\Theta_2}{da}.$$

Diese Gleichung, in welcher wegen $\frac{d\Theta_2}{da}$ noch $\frac{dy}{da}$ und $\frac{dz}{da}$ vorkommen, gibt, verbunden mit den obigen Gleichungen: $\frac{dy}{dx} = \Theta_1 \frac{dx}{da}$; $\frac{dz}{da} = \Theta_2 \frac{dx}{da}$, durch Auflösung schliefslich die Werte:

$$\frac{dx}{da} = (\gamma\varphi' - \beta\psi') \cdot L; \quad \frac{dy}{da} = (\alpha\psi' - \gamma) \cdot L; \quad \frac{dz}{da} = (\beta - \alpha\varphi') \cdot L$$

worin abkürzend gesetzt wurde

$$a - x = \alpha, \quad \varphi - y = \beta, \quad \psi - z = \gamma; \quad \frac{d\varphi}{da} = \varphi'; \quad \frac{d\psi}{da} = \psi';$$

$$L = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[(\alpha\psi' - \gamma)\varphi'' + (\beta - \alpha\varphi')\psi'']}{(\alpha + \beta\varphi' + \gamma\psi')[(\alpha + \beta\varphi' + \gamma\psi')^2 - (1 + \varphi'^2 + \psi'^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)]}.$$

Die Integration liefert also die singulären Lösungen xyz als Funktionen des Parameters a mit drei willkürlichen Konstanten.

Wir lösen nun die Aufgabe durch die dritte Methode, welche ausgeht von den vorhin aufgestellten vollständigen Integralgleichungen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \varrho^2$$
$$m(x-a) + n(y-b) + z - c = 0$$
$$b = \varphi(a), \qquad c = \psi(a),$$

indem wir die Differentialgleichungen wieder in der gelösten Form

$$X_1 = \varphi(X), \qquad X_2 = \psi(X)$$

annehmen. Die Modifikation (β) unsrer Methode läfst die gesuchten singulären Lösungen zehn Gleichungen genügen, obigen vier und den folgenden sechs:

(Ableitungen nach x:)

$$a - x + y'(b - y) + z'(c - z) = 0$$
$$m + ny' + z' = 0,$$

(Ableitungen bezüglich $a\varrho m n$:)

$$a-x+(b-y)\frac{db}{da}+(c-z)\frac{dc}{da}-\varrho\frac{d\varrho}{da}=0$$

$$1+y'\frac{db}{da}+z'\frac{dc}{da}=0$$

$$m+n\frac{db}{da}+\frac{dc}{da}+(a-x)\frac{dm}{da}+(b-y)\frac{dn}{da}=0$$

$$\frac{dm}{da}+y'\frac{dn}{da}=0.$$

Wir haben hier schon a zur unabhängigen Variabeln genommen; wir führen nun überall

$$b=\varphi(a),\quad c=\psi(a);\quad \frac{db}{da}=\varphi';\quad \frac{dc}{da}=\psi'$$

ein und benutzen die alten Abkürzungen

$$a-x=\alpha,\quad b-y=\beta,\quad c-z=\gamma.$$

Dann hat man die acht Gleichungen:

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\varrho^2$	(5) $\alpha+\beta\varphi'+\gamma\psi'-\varrho\frac{d\varrho}{da}=0$
(2) $\alpha m+\beta n+\gamma=0$	(6) $1+y'\varphi'+z'\psi'=0$
(3) $\alpha+\beta y'+\gamma z'=0$	(7) $m+n\varphi'+\psi'+\alpha\frac{dm}{da}+\beta\frac{dn}{da}=0$
(4) $m+ny'+z'=0$	(8) $\frac{dm}{da}+y'\frac{dn}{da}=0.$

Man hat $xyzy'z'$ aus diesen Gleichungen zu eliminieren, um drei Differentialgleichungen erster Ordnung für $mn\varrho$ als Funktionen von a zu erhalten. Benutzt man die Abkürzungen

$$p=n\psi'-\varphi';\quad q=1-m\psi';\quad r=m\varphi'-n;$$

$$m^2+n^2+1=M;\quad m+n\varphi'+\psi'=N;\quad 1+\varphi'^2+\psi'^2=A,$$

so gibt die Elimination von $y'z'$ aus (3) (4) (6) die Gleichung:

(9) $$p\alpha+q\beta+r\gamma=0.$$

Darauf gibt die Auflösung von (1) (2) (9) nach xyz oder nach $\alpha\beta\gamma$, in welchen Verbindungen diese Gröfsen allein auftreten:

(10) $$\left\{\begin{aligned}\alpha&=a-x=\pm\frac{\varrho(nr-q)}{\sqrt{M(MA-N^2)}}\\ \beta&=\varphi-y=\pm\frac{\varrho(p-mr)}{\sqrt{M(MA-N^2)}}\\ \gamma&=\psi-z=\pm\frac{\varrho(mq-np)}{\sqrt{M(MA-N^2)}}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man die positiv genommenen Werte*) in (5) (7) (8), so erhält man schliefslich

$$\frac{d\varrho}{da} = -W; \quad \frac{dm}{da} = \frac{qN}{\varrho W}; \quad \frac{dn}{da} = -\frac{pN}{\varrho W},$$

worin $$W = \sqrt{\frac{MA - N^2}{M}}$$ ist.

Diese Formeln bestimmen $mn\varrho$ als Funktionen von a und drei Konstanten; dann geben (10) die gesuchten Kurvenkoordinaten xyz als Funktionen derselben Gröfsen.

Während unsre Methode uns somit auf die gesuchten Gröfsen xyz erst durch die Vermittlung der $mn\varrho$ führte, ist hier noch eine andre Modifikation möglich, welche direkt auf xyz führt. Geht man wieder von den auf S. 23 aufgestellten acht Gleichungen aus, nimmt überall a als unabhängige Variable und beachtet, dafs dann die Gleichungen (5) und (7) von den vier ersten Gleichungen abhängig werden, so ist es nicht schwer, aus den sechs bleibenden Gleichungen $mn\varrho$ und zugleich $\frac{dm}{da}$ und $\frac{dn}{da}$ zu eliminieren. Es bleiben drei lineare Gleichungen für $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$ übrig, deren Auflösung nach diesen Gröfsen genau die Werte ergiebt, die wir S. 22 mit Hilfe der zweiten Methode gefunden hatten.

Es scheint zweifelhaft, ob das so erhaltene System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung in praxi vortheilhafter ist, als die von Serret aufgestellte, allerdings sehr unförmliche Differentialgleichung dritter Ordnung.

Zweiter Teil. Serret's erste Klasse.

§ 1. Vorbemerkungen.

Die Differentialgleichungen der ersten von Serret betrachteten Klasse sind gebildet aus solchen $(m+1)$ gegebenen Funktionen $XX_1 \ldots X_m$ von $xyzy'z' \ldots y^n z^n$, dafs

(1) $$X = a, \quad X_1 = a_1, \ldots X_m = a_m$$

Integrale sind einer einzigen totalen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen drei Variabeln y, z und x:

---

*) Es ist gleichgültig, welches Zeichen man benutzt, da die Werte für das positive Zeichen übergehen in die für das andere, wenn man den Radius negativ denkt, $-\varrho$ für ϱ setzt.

(2) $$\Omega(xyzy'z' \dots y^{n+1} z^{n+1}) = 0.$$

Serret bemerkt, dafs die (1) solche Integrale dann sind, wenn die Verhältnisse ihrer vollständigen Differentialquotienten nach x:

$$\frac{dX}{dx} : \frac{dX_1}{dx} : \dots : \frac{dX_m}{dx}$$

frei sind von y^{n+1} und z^{n+1}. Er zeigt sodann, dafs die Gleichung:

(3) $$\Pi(xyzy'z' \dots y^{n-m} z^{n-m} a a_1 \dots a_m) = 0,$$

welche resultiert durch Elimination von $y^n y^{n-1} \dots y^{n-m+1}$ aus den (1), auch frei ist von $z^n z^{n-1} \dots z^{n-m+1}$; denn betrachtet man z als beliebig gegebene Funktion von x, so ist (2) eine Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen y und x allein und die (1) sind $(m+1)$ unabhängige Integrale von ihr (woraus sich beiläufig ergibt, dafs höchstens $m + 1 = n + 1$, $m = n$ sein kann). Also ist $\Pi = 0$ eine Integralgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung und die (1) äquivalent den $(m+1)$ Gleichungen:

(4) $$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \dots \Pi^m = 0.$$

Enthielte Π einen höhern Differentialquotienten von z als z^{n-m}, etwa z^{n-m+1}, so enthielte Π^m schon z^{n+1}, wodurch die den (4) äquivalenten Gleichungen (1) aufhören würden, Integrale zu sein. Soweit geht Serret. Wir wollen nun umgekehrt auf zwei verschiedene Arten zeigen, dafs allgemein jede beliebige Gleichung:

$$\Pi(xyzy'z' \dots y^{n-m} z^{n-m} a a_1 \dots a_m) = 0,$$

nur von der Art, dafs die damit durch vollständige Differentiation gebildeten $(m+1)$ Gleichungen:

$$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \dots \Pi^m = 0$$

auflösbar sind nach den willkürlichen Konstanten a, $a_1 \dots a_m$, in diesen Auflösungen

(1′) $$a = X, \quad a_1 = X_1, \dots a_m = X_m$$

immer $(m+1)$ unabhängige Integrale einer totalen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen yzx liefert. Wissen wir dann, wie das meist in praxi der Fall ist, dafs gewisse Funktionen (1) auf diese Weise entstanden sind, so wissen wir zugleich, dafs es solche Integrale sind, während Serret dies in jedem Falle besonders erst zeigen mufs dadurch, dafs er die Verhältnisse der vollständigen Differentialquotienten bildet und untersucht, ob dieselben frei sind von y^{n+1} und z^{n+1}, was meist eine äufserst umständliche Rechnung erfordert.

Zum Beweise unsres Satzes nehmen wir nun an, Π sei eine beliebige Funktion von der angedeuteten Beschaffenheit. Sind dann mit diesem Π die Gleichungen (4) gebildet und aus diesen durch Auf-

lösung nach den $a a_1 \ldots a_m$ die Gleichungen (1′) hervorgegangen, so müssen diese, wenn sie Integrale sein sollen, zunächst lösbar sein nach $y^{n-m} y^{n-m+1} \ldots y^n$ oder nach $z^{n-m} z^{n-m+1} \ldots z^n$; das sind sie aber, weil es die Gleichungen (4) infolge ihrer Bildung durch Differentiation sind. Denkt man nun für z eine beliebige Funktion von x eingesetzt, derart, dafs Π nicht frei wird $y y' \ldots y^{n-m}$ und die Gleichungen (4) immer noch die Grössen $a a_1 \ldots a_m$ wirklich bestimmen, so ist nach der Theorie der Differentialgleichungen $\Pi = 0$ eine vollständige Integralgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung einer Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen y und x allein und die (1′) sind $(m+1)$ unabhängige Integrale derselben. Dies erfordert bekanntlich, dafs jede der Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{dX_1}{dx} = 0, \quad \ldots \quad \frac{dX_m}{dx} = 0$$

für jede Funktion $z(x)$, also umsomehr bei unbestimmtem z, für y^{n+1} denselben Wert liefert; und das ist nur möglich, wenn sie sämtlich linear sind bezüglich y^{n+1} und aufserdem m Identitäten bestehen von der Form

$$(6) \qquad \frac{dX_1}{dx} \equiv \lambda_1 \frac{dX}{dx}; \quad \frac{dX_2}{dx} \equiv \lambda_2 \frac{dX}{dx}; \ldots \frac{dX_m}{dx} \equiv \lambda_m \frac{dX}{dx};$$

wo die λ frei sind von y^{n+1} und ebenso von z^{n+1}, denn man kann dieselbe Betrachtung durchführen, indem man für y eine beliebige Funktion von x setzt und z als unabhängige Variable beibehält. Man kann die Gleichungen (6) auch so schreiben:

$$(6') \qquad \frac{dX}{dx} : \frac{dX_1}{dx} : \cdots : \frac{dX_m}{dx} = 1 : \lambda_1 : \ldots : \lambda_m$$

d. h. diese Verhältnisse sind frei von y^{n+1}, z^{n+1}, also die (1′) Integrale einer Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form (2). — Eine zweite Art des Beweises ist folgende. Wenn die Gleichungen (1′) die Auflösungen der Gleichungen (4) sind, so erfüllen sie dieselben identisch. Diese Substitution der Gleichungen (1′), angedeutet durch die Klammer ( ), ergibt also die Identitäten:

$$(\Pi) \equiv \Pi(x y z y' z' \ldots y^{n-m} z^{n-m} X X_1 \ldots X_m) \equiv 0$$
$$(\Pi') \equiv 0; \qquad (\Pi'') \equiv 0; \ \ldots \ (\Pi^m) \equiv 0.$$

Differenziert man die m ersten vollständig nach x und beachtet sodann diese $(m+1)$ Gleichungen selbst, so ergeben sich die m Identitäten:

$$(7) \qquad \sum_0^m{}_h \frac{\partial (\Pi^i)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} \equiv 0; \qquad i = 0, 1 \ldots (m-1),$$

wo der Index 0 das X anzeigen soll. Diese linearen homogenen Relationen verlieren ihre Homogenität bezüglich der $\frac{dX_h}{dx}$ durch Division

mit $\frac{dX}{dx}$ und ergeben somit, da man im allgemeinen voraussetzen darf, dafs die betreffende Determinante nicht Null ist, die m Werte

$$\frac{dX_1}{dx} : \frac{dX}{dx}, \quad \frac{dX_2}{dx} : \frac{dX}{dx}, \ldots \frac{dX_m}{dx} : \frac{dX}{dx}$$

als blofse Funktionen der partiellen Ableitungen der (Π^i), also frei von y^{n+1} und z^{n+1}.

Ebenso läfst sich rückwärts zeigen, dafs $(m+1)$ Funktionen (1'), zwischen denen m Identitäten (6) bestehen, oder, was dasselbe ist, für welche die Verhältnisse (6') frei sind von $y^{n+1} z^{n+1}$, immer die Auflösungen gewisser Gleichungen (4) sind (also aus einer Gleichung von der Form (3) entstanden zu denken), sobald man noch annimmt, dafs die gegebenen $X X_1 \ldots X_m$ unabhängig sind bezüglich $y^{n-m} \ldots y^n$ oder $z^{n-m} \ldots z^n$. Bleibt die letztre Eigenschaft bestehen und bleiben die $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ bestimmt und endlich, wenn man für z eine beliebige Funktion von x setzt, so liefert infolge der (6) immer noch jede der Gleichungen (5) denselben Wert für y^{n+1} und die Gleichungen (1), wo $a a_1 \ldots a_m$ willkürliche Konstanten bedeuten, sind daher unabhängige Integrale einer Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen y und x allein. Bezeichnet man dann mit $\Pi = 0$ das Resultat der Elimination von $y^{n-m+1} \ldots y^n$ aus den (1), so müssen umgekehrt wieder (4) die (1) zu Auflösungen besitzen. Da dies gilt für jede beliebige Funktion $z(x)$, so gilt es umsomehr bei unbestimmtem z; denn wenn es nicht überhaupt bei diesem gälte, hätte es auch für kein besondres z gelten können. Käme nun in $\Pi = 0$ ein höherer Differentialquotient von z vor als z^{n-m}, so würde z^{n+1} in Π^m vorkommen, somit könnten die (1) nicht die Auflösungen sein. Damit hat man den Satz bewiesen:

Wenn $(m+1)$ Funktionen $X X_1 \ldots X_m$ unabhängig sind bezüglich $y^{n-m} \ldots y^n$ oder $z^{n-m} \ldots z^n$ und die Verhältnisse ihrer vollständigen Differentialquotienten frei sind von y^{n+1} und *z^{n+1}, so sind es Integrale einer Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form (2) und können immer entstanden gedacht werden aus einer Gleichung*

$$\Pi(x y z y' z' \ldots y^{n-m} z^{n-m} a a_1 \ldots a_m) = 0$$

und deren n ersten Ableitungen nach x durch deren Auflösung nach den Konstanten $a a_1 \ldots a_m$.

Im Grenzfalle $m = n$ geht diese Gleichung in eine endliche über; man findet also aus einer Gleichung

$$f(x y z a a_1 \ldots a_m \ldots a_n) = 0$$

und deren n ersten Ableitungen durch Auflösung nach $a a_1 \ldots a_n$ die sämtlichen $(n+1)$ Integrale einer Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ord-

nung (2). Diese letztere ist alsdann unbeschränkt integrabel, d. h. sie besitzt in $f = 0$ eine endliche vollständige Integralgleichung. Diese Voraussetzung wollen wir ferner immer gemacht denken, die in Frage kommende totale Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sei immer eine unbeschränkt integrable, die benutzten Integrale seien also immer $(m+1)$ von den $(n+1)$ Auflösungen einer endlichen Gleichung $f = 0$ und ihrer n Ableitungen; daneben sind sie immer noch die Auflösungen einer nicht endlichen Gleichung $\Pi = 0$ und deren m Ableitungen.

§ 2. **Die allgemeine Lösung.**

Es handelt sich nun um die aus solchen Integralen (1) gebildeten beiden Differentialgleichungen:

(A) $$F(XX_1 \ldots X_m) = 0; \qquad \Phi(XX_1 \ldots X_m) = 0,$$

wo F und Φ unabhängige Funktionen sein sollen bezüglich der $XX_1 \ldots X_m$. Zunächst ist klar, dafs irgend zwei Integrale $X_i = a_i$ und $X_\varkappa = a_\varkappa$ stets abhängig sind bezüglich y^n und z^n. Denn bezeichnet man kurz

$$\Delta X_i \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x} + y' \frac{\partial X_i}{\partial y} + z' \frac{\partial X_i}{\partial z} + \cdots + y^n \frac{\partial X_i}{\partial y^{n-1}} + z^n \frac{\partial X_i}{\partial z^{n-1}},$$

so ist nach § 1 das Verhältnis

$$\frac{\frac{dX_i}{dx}}{\frac{dX_\varkappa}{dx}} = \frac{\Delta X_i + y^{n+1}\frac{\partial X_i}{\partial y^n} + z^{n+1}\frac{\partial X_i}{\partial z^n}}{\Delta X_\varkappa + y^{n+1}\frac{\partial X_\varkappa}{\partial y^n} + z^{n+1}\frac{\partial X_\varkappa}{\partial z^n}} \equiv P(xyzy'z'\ldots y^n z^n),$$

wo P frei ist von $y^{n+1} z^{n+1}$; geordnet:

$$(\Delta X_i - P \cdot \Delta X_\varkappa) + y^{n+1}\left(\frac{\partial X_i}{\partial y^n} - P\frac{\partial X_\varkappa}{\partial y^n}\right) + z^{n+1}\left(\frac{\partial X_i}{\partial z^n} - P\frac{\partial X_\varkappa}{\partial z^n}\right) \equiv 0.$$

Darin kommen y^{n+1} und z^{n+1} je einmal explicite vor und sonst nicht weiter, also kann diese Identität nur bestehen, wenn einzeln

$$\Delta X_i - P \cdot \Delta X_\varkappa \equiv \frac{\partial X_i}{\partial y^n} - P\frac{\partial X_\varkappa}{\partial y^n} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z^n} - P\frac{\partial X_\varkappa}{\partial z^n} \equiv 0$$

oder wie aus den beiden letzten folgt, wenn

$$\frac{\partial X_i}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial X_\varkappa}{\partial z^n} - \frac{\partial X_\varkappa}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z^n} \equiv 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Dann folgt sofort, dafs auch die Differentialgleichungen (A) abhängig sind bezüglich y^n und z^n; denn nach einem bekannten Satze sind F und Φ abhängig oder unabhängig bezüglich der Argumente in den $XX_1 \ldots X_m$, je nachdem diese letztern es sind. Man kann somit die

(A) nicht auflösen nach y^n und z^n, und wir wollen weiter zeigen, dafs es überhaupt keine gewöhnlichen Differentialgleichungen sind, die etwa äquivalent wären einem System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung, sondern eine Art totaler integraler Differentialgleichungen zwischen drei Variabeln.

Man kann jedes Lösungspaar y, z der Differentialgleichungen (A) auch so definieren: es mufs erfüllen

(1) $$X = a, \quad X_1 = a_1 \quad \ldots \quad X_m = a_m,$$

und alsdann

(8) $$F(aa_1 \ldots a_m) = 0, \quad \Phi(aa_1 \ldots a_m) = 0,$$

denn man erhält rückwärts durch Einsetzen der (1) in die (8) wieder die (A). Die Gleichungen (1) sind aber äquivalent den

(4) $$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \quad \ldots \quad \Pi^m = 0;$$

und wenn y, z die erste erfüllen,

(3) $$\Pi = 0,$$

so erfüllen sie bei konstanten $aa_1 \ldots a_m$ die andern von selbst; also brauchen die Lösungen lediglich (3) zu erfüllen, und alsdann sind nur noch die Konstanten gemäfs den Gleichungen (8) zu bestimmen. Im Grenzfalle $m = n$ ist $\Pi = 0$ eine endliche Gleichung

$$f(xyzaa_1 \ldots a_n) = 0;$$

ein jedes Lösungspaar y, z hat dann lediglich diese Gleichung zu erfüllen, worin die a nur den Gleichungen (8) unterworfen sind. Dann ist ersichtlich, dafs man eine der Variabeln, etwa z, willkürlich als Funktion von x wählen kann; zusammen mit dem hierauf aus $f = 0$ bestimmten y ist das dann immer ein Lösungspaar; mit andern Worten, $f = 0$ ist die allgemeine Lösung der (A), in Verbindung mit den Gleichungen (8), welche nur die $(n + 1)$ Konstanten auf $(n - 1)$ reducieren. Aber auch im allgemeineren Falle, $m < n$, kommt man offenbar zum gleichen Resultat; nach unsern Annahmen ist ja $\Omega = 0$, also auch $\Pi = 0$ unbeschränkt integrabel; man gelangt somit durch vollständige Integration zu einer endlichen Integralgleichung mit $n - m$ neuen, zusammen also mit $(n - m) + (m + 1) = (n + 1)$ Konstanten, die sich durch die Gleichungen (8) auf $(n - 1)$ reducieren; aus dieser Gleichung entsteht dann eine Lösung der (A) für jedes willkürlich angenommene z. Man könnte, um eine Lösung zu erhalten, auch gleich in $\Pi = 0$ für z eine willkürliche Funktion von x setzen und die Integration der dadurch entstandenen Differentialgleichung $(n - m)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen y und x allein vollenden, wie dies Serret wünscht. — Wir gelangen also zu dem Resultat, dafs diese merkwürdige Klasse

von Differentialgleichungen eine allgemeine Lösung in Form einer einzigen Relation zwischen den drei Variabeln und $(n - 1)$ Konstanten besitzt, dafs bei dieser Lösung also immer eine Variable völlig willkürlich bleibt. Hat das Problem eine vernünftige geometrische Bedeutung, so stellt diese allgemeine Lösung nicht, wie erwartet, eine Kurve dar, sondern eine Fläche oder vielmehr eine $(n - 1)$ fach unendliche Flächenschaar, und jede Kurve auf einer dieser Flächen löst das Problem. Wir werden aber sehen, dafs daneben noch singuläre Lösungen existieren können, welche wirklich beide Variabeln bestimmen, dafs also aufserhalb jener Flächenschaaren noch Kurvenschaaren vorhanden sein können, die unser Problem gleichfalls lösen, und zwar ist dies in der Regel die wirkliche Lösung, während die allgemeine geometrisch meist evident ist. Sobald wir aber auf irgend einem Wege Lösungen, d. h. Kurvenschaaren finden, für welche sämtliche $a a_1 \dots a_m$ konstant ausfallen, so zeigt dies, dafs jene Kurvenschaaren auf den besprochnen Flächen liegen, d. h. dafs die vermeintlichen Lösungen nur partikuläre sind, die entstanden gedacht werden können aus der allgemeinen Lösung durch eine gewisse Wahl des z als Funktion von x und einer beliebigen Anzahl von Konstanten. Da diese Anzahl keiner Beschränkung unterworfen ist, so kann eine solche partikuläre Lösung unendlich viele Konstanten enthalten. Wir wollen übrigens hervorheben, dafs wir die Differentialgleichungen (A) als unser „*Problem*“ bezeichnen, welches jene allgemeine Lösung, daraus abgeleitete partikuläre und etwaige singuläre Lösungen besitzt; für die letztern werden wir gewisse „*Systeme*“ von Differentialgleichungen aufstellen; dann sind die vollständigen wie die singulären Lösungen eines solchen „Systems“ die gesuchten singulären (eventuell auch blos partikulären) Lösungen unsers „Problems“ (A). — Beiläufig sei noch bemerkt, dafs alle Schlüsse darauf basieren, dafs die (A) blofse Funktionen der Integrale sind und nicht etwa die Variabeln noch nebenbei enthalten. Da Serret dies nicht besonders hervorhebt, sondern nur die Abhängigkeit bezüglich y^n und z^n betont, könnte man denken, dafs diese letztre Eigenschaft allein genüge, den Differentialgleichungen (A) diesen eigentümlichen Charakter zu verleihen. Dies ist offenbar nicht der Fall; denn Differentialgleichungen von der Form

$$F(X X_1 \dots X_m) = u(x y z y' z' \dots y^{n-1} z^{n-1})$$
$$\Phi(X X_1 \dots X_m) = v(x y z y' z' \dots y^{n-1} z^{n-1})$$

sind immer noch abhängig bezüglich y^n und z^n, sind aber doch gewöhnliche Differentialgleichungen, nur von niederer Ordnung; denn es hat, nach dem vorhin benutzten zerlegenden Verfahren, jedes Lösungspaar y, z zu erfüllen die Gleichungen:

$$X = a, \quad X_1 = a_1 \ldots X_m = a_m,$$

oder die ihnen äquivalenten Gleichungen (4), und daneben

(8') $$F(a a_1 \ldots a_m) = u, \quad \Phi(a a_1 \ldots a_m) = v.$$

Benutzt man nur die m ersten Gleichungen (4)

$$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \ldots \Pi^{m-1} = 0,$$

um etwa $z^{n-m} \ldots z^{n-1}$ zu berechnen als Funktionen von $x y y' \ldots \ldots y^{n-1} z z' \ldots z^{n-m-1}$ und setzt dies in die (8'), so hat man zwei unabhängige Differentialgleichungen, welche die Differentialquotienten von y bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$, von z bis zur $(n-m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten, also einem System von $(2n-m-2)$ Differentialgleichungen 1. Ordnung äquivalent sind und beide Variabeln y und z wirklich bestimmen.

§ 3. Die singulären Lösungen. Zweite Methode Weg B.

Wir wenden uns nun zu den singulären Lösungen. Wir hatten die (A) ersetzt durch die ihnen äquivalenten Gleichungen:

(4) $$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \ldots \Pi^m = 0$$

(8) $$F(a a_1 \ldots a_m) = 0, \quad \Phi(a a_1 \ldots a_m) = 0.$$

Wir wollen nun diese Gleichungen nach der Serret'schen Methode erfüllen, indem wir die $a a_1 \ldots a_m$ nicht als konstant, sondern als Funktionen von x ansehen. Dann hat man nur zu bewirken, dafs die durch vollständige Differentiation nach x aus $\Pi = 0$ entstehenden Gleichungen

$$\Pi = 0, \quad D_x \Pi = 0, \quad D_x^2 \Pi = 0 \ldots D_x^m \Pi = 0$$

immer noch mit den ursprünglichen Gleichungen (4) zusammenfallen, weil sie nur dann den Integralen (1) und damit den (4) selbst äquivalent bleiben. Wir sind des Folgenden wegen genötigt, die vollständige Differentiation nach x bezüglich sämtlicher Argumente durch D, die der Variabeln xyz und deren Abgeleiteten nach x durch d (oder auch, wie bisher, durch obere Indices), und die der Variabeln $a a_1 \ldots a_m$ nach x ausschliefslich durch δ zu bezeichnen, so dafs z. B. für eine Funktion

$$U(x y z y' z' \ldots y^{\varkappa} z^{\varkappa} a a_1 \ldots a_m)$$

$$D_x U \equiv \frac{dU}{dx} + \frac{\delta U}{\delta x}$$ bedeutet, wo

$$\frac{dU}{dx} \equiv \frac{\partial U}{\partial x} + y' \frac{\partial U}{\partial y} + z' \frac{\partial U}{\partial z} + \ldots + y^{\varkappa+1} \frac{\partial U}{\partial y^{\varkappa}} + z^{\varkappa+1} \frac{\partial U}{\partial z^{\varkappa}}$$

$$\frac{\delta U}{\delta x} \equiv \frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{\partial U}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial a_m} \frac{da_m}{dx}.$$

Serret zeigt nun, dafs zum Zusammenfallen jener beiden Reihen von Gleichungen die m Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad \frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta \Pi''}{\delta x} = 0, \ldots \frac{\delta \Pi^{m-1}}{\delta x} = 0$$

erfüllt sein müssen, und er zeigt weiter, dafs diese ersetzbar sind durch

$$\text{(C)} \qquad \frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta^2 \Pi}{\delta x^2} = 0 \ldots \frac{\delta^m \Pi}{\delta x^m} = 0.$$

Also haben die singulären Lösungen und die weiteren unbekannten Funktionen $a a_1 \ldots a_m$ zu erfüllen die m Gleichungen (B) oder (C), die Gleichung (3) $\Pi = 0$ und die Gleichung (8), also $m + 3$ Gleichungen für $m + 3$ Unbekannte, womit sich Serret begnügt. Gerade hier beginnt aber erst die Schwierigkeit der Untersuchung, welche darin besteht, aus diesen $m + 3$ Gleichungen, mit denen sich so ohne weiteres nicht operieren läfst, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen herzustellen. Wir werden dies thun, die Ordnung des fraglichen Systems und damit die Anzahl der willkürlichen Konstanten der Lösungen bestimmen und zeigen, dafs das Problem im allgemeinen ein bestimmtes und lösbares ist. Zunächst wollen wir alle Gleichungen, denen die singulären Lösungen unsres Problems genügen, übersichtlich darstellen. Von vornherein seien jedoch etwa a und a_1 durch die Gleichungen (8) berechnet, daraus $\frac{da}{dx}$, $\frac{da_1}{dx}$ gebildet und diese vier Werte in alle übrigen Gleichungen eingesetzt, so dafs man es nur noch mit den $(m - 1)$ unbekannten Funktionen $a_2 a_3 \ldots a_m$ (neben y, z) zu thun hat. Dies bewirkt im übrigen keine weiteren Änderungen, die (B) bleiben linear und homogen bezüglich der $\frac{da_i}{dx}$; wir wollen daher, um die Rechnung nicht durch diesbezügliche Bezeichnungen zu complicieren, diese Substitutionen überall geschehen denken, ohne sie äusserlich anzudeuten. Dann haben die unbekannten Funktionen $y z a_2 a_3 \ldots a_m$ von x zu erfüllen

$$\Pi(xyzy'z' \ldots y^{n-m} z^{n-m} a_2 a_3 \ldots a_m) = 0,$$

folglich auch die vollständig differenzierte

$$D_x \Pi \equiv \Pi' + \frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0,$$

also nach der ersten (B) die beiden unabhängigen Gleichungen:

$$\Pi'(xyzy'z' \ldots y^{n-m+1} z^{n-m+1} a_2 a_3 \ldots a_m) = 0;$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \frac{da_2}{dx} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} \cdot \frac{da_3}{dx} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \cdot \frac{da_m}{dx} = 0;$$

sodann die beiderseits wiederum differenzierten

$$D_x \Pi' \equiv \Pi'' + \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0; \quad \text{und}$$

$$D_x \frac{\delta \Pi}{\delta x} \equiv \frac{d}{dx} \frac{\delta \Pi}{\delta x} + \frac{\delta^2 \Pi}{\delta x^2} = 0,$$

oder infolge der zweiten (B), da $\frac{\delta \Pi'}{\delta x} \equiv \frac{d}{dx} \frac{\delta \Pi}{\delta x}$:

$$\Pi'' = 0, \quad \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta^2 \Pi}{\delta x^2} = 0,$$

So erhält man durch fortgesetzte Differentiation folgendes Schema (wir lassen der bessern Übersicht halber die Nenner der Differentialquotienten weg):

$$\Pi = 0$$
$$\Pi' = 0; \qquad \delta \Pi = 0;$$
$$\Pi'' = 0; \quad \delta \Pi' = 0; \quad d\delta \Pi = 0; \quad \delta^2 \Pi = 0;$$
$$\Pi''' = 0; \quad \delta \Pi'' = 0; \quad d\delta \Pi' = 0; \quad \delta^2 \Pi' = 0; \quad d\delta^2 \Pi = 0; \quad \delta^3 \Pi = 0;$$
$$\Pi^{IV} = 0; \ \delta \Pi''' = 0; \ d\delta \Pi'' = 0; \ \delta^2 \Pi'' = 0; \ d\delta^2 \Pi' = 0; \ \delta^3 \Pi' = 0; \ d\delta^3 \Pi = 0; \ \delta^4 \Pi = 0.$$

u. s. f.

Da man die Zeichen d und δ beliebig vertauschen kann, so sind, wie das Schema andeutet, je zwei benachbarte Posten identisch; läſst man die überflüssigen weg, so gelangt man zu folgenden $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ Gleichungen, denen $y z a_2 \ldots a_m$ allein noch genügen müssen:

$$\begin{array}{llllll}
\Pi = 0 & & & & & \\
\Pi' = 0; & \delta \Pi = 0 & & & & \\
\Pi'' = 0; & \delta \Pi' = 0; & \delta^2 \Pi = 0 & & & \\
\Pi''' = 0; & \delta \Pi'' = 0; & \delta^2 \Pi' = 0; & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\Pi^{m-2} = 0; & \delta \Pi^{m-3} = 0; & \delta^2 \Pi^{m-4} = 0; & \ldots & \delta^{m-2} \Pi = 0: & \\
\Pi^{m-1} = 0; & \delta \Pi^{m-2} = 0; & \delta^2 \Pi^{m-3} = 0; & \ldots & \delta^{m-2} \Pi' = 0; & \delta^{m-1} \Pi = 0; \\
\Pi^{m} = 0; & \delta \Pi^{m-1} = 0; & \delta^2 \Pi^{m-2} = 0; & \ldots & \delta^{m-2} \Pi'' = 0; & \delta^{m-1} \Pi' = 0; \quad \delta^m \Pi = 0.
\end{array}$$

Faſst man in Π von vornherein $a_2 a_3 \ldots a_m$ als abhängige Variabeln neben y und z auf und wählt man $(m+1)$ Gleichungen dieses Schemas derart, daſs man jeder Horizontalreihe irgend eine Gleichung entnimmt, so ziehen solche $(m+1)$ Gleichungen mit Hilfe der Differentiation alle übrigen Gleichungen des Schemas ausnahmslos nach sich wie man im ersten Schema leicht überblickt, reichen also allein aus,

um die singulären Lösungen zu definieren. Solche Kombinationen von $(m+1)$ Gleichungen sind also die beiden von Serret allein aufgestellten

$\Pi = 0$ und (B) (zweite Vertikalreihe), oder
$\Pi = 0$ und (C) (in jeder Horizontalreihe die letzte).

Beide verdienen besondre Beachtung, da die erste die Differentialquotienten von y und z bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ und die Differentialquotienten der a nur bis zur ersten Ordnung; die zweite dagegen yz nur bis zur $(n-m)^{\text{ten}}$, die Differentialquotienten der a bis zur m^{ten} Ordnung enthält. Wir werden im folgenden die Anwendung der ersten Kombination kurz als den Weg (B), die der zweiten als den Weg (C) bezeichnen; wir haben nun zu untersuchen, welche Resultate sie liefern, und wenn der eine oder andre zur Auffindung der singulären Lösungen geeignet ist. Es sei im voraus bemerkt, dafs Weg (C) in vielen Fällen nicht anwendbar zu sein scheint, während Weg (B) in der Theorie stets durchführbar ist; wir behandeln ihn zuerst.

Die m Gleichungen (B) sind linear und homogen bezüglich der $(m-1)$ Differentialquotienten $\frac{da_2}{dx} \ldots \frac{da_m}{dx}$, also ersetzbar durch etwa die $(m-2)$ ersten und die beiden Determinanten $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, welche auftreten bei Zusammenstellung jener $(m-2)$ ersten Gleichungen einmal mit der vorletzten, und einmal mit der letzten der (B), also

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} & \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} & \cdots & \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_m} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi^{m-1}}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-1}}{\partial a_m} \end{vmatrix}$$

Verwendet man nun, wie dies nahe liegt, nur diese

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0,$$

und daneben noch die Gleichungen der ersten Vertikalreihe des Schemas, die frühern Gleichungen (4), mit Ausnahme der letzten Gleichung $\Pi^m = 0$, welche $y^n z^n$ einführen würde:

$$(4^\alpha) \qquad \Pi = 0 \quad \Pi' = 0 \ \ldots \quad \Pi^{m-1} = 0,$$

so hat man $(m+2)$ Gleichungen mit $xyzy'z' \ldots y^{n-1}z^{n-1}a_2 \ldots a_m$ allein; durch Elimination von $z^{n-1}a_2 \ldots a_m$ blieben zwei Gleichungen

mit $y^{n-1} z^{n-2}$, ein System $(2n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung; es ist dann leicht zu zeigen, dafs dessen Lösungen alle übrigen Gleichungen des Schemas erfüllen, also auch unser Problem lösen. Bei weiterer Verfolgung zeigt sich jedoch, dafs die vollständigen Lösungen dieses Systems $(2n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung immer sämtliche a konstant machen, also nur partikuläre Lösungen des Problems sind, dafs dagegen singuläre Lösungen des Systems mit höchstens $(2n-4)$ Konstanten in der Regel auch wirklich singuläre Lösungen des Problems sind und dann überdies mit den vollständigen Lösungen, die man auf dem Wege (C) erhält (wenn dieser anwendbar ist, wie bei $m=2$) zusammenfallen. Dies deutet an, dafs man für die singulären Lösungen ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten mufs. Es ist jedoch eo ipso klar, dafs Gleichungen, die sich aus den schon benutzten irgendwie ableiten lassen und dabei von diesen algebraisch unabhängig sind, ohne dabei höhere Differentialquotienten zu enthalten, mit in Betracht zu ziehen sind. Eine solche Gleichung entsteht aber auf folgende Weise. Es erfüllen alle Lösungen des Problems neben $\Delta_1 = 0$ die vollständig differenzierte:

$$D_x \Delta_1 \equiv \frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{\delta \Delta_1}{\delta x} = 0.$$

Bildet man $\frac{d\Delta_1}{dx}$ durch successive Differentiation der Horizontalreihen, so verschwinden die $(m-2)$ ersten dergestalt entstehenden Determinanten, weil immer zwei benachbarte Reihen identisch werden; es bleibt die letzte, entstanden durch Differentiation der letzten Horizontalreihe. Das ist aber gerade Δ_2; somit ist $\frac{d\Delta_1}{dx} = \Delta_2$, und wegen $\Delta_2 = 0$ wird

$$D_x \Delta_1 = \frac{\delta \Delta_1}{\delta x} \equiv \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_2}\,\frac{da_2}{dx} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_3}\,\frac{da_3}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_m} \cdot \frac{da_m}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung verbinden wir mit den vorhin schon benutzten $(m-2)$ ersten (B); und diese $(m-1)$ in den $\frac{da_i}{dx}$ homogenen Gleichungen ziehen nach sich eine neue Determinante

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} & \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} & \cdots & \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-3}}{d a_m} \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_3} & \cdots & \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Somit haben die singulären Lösungen zu erfüllen

$$\Pi = 0; \qquad \Pi' = 0 \ldots \Pi^{m-1} = 0$$
$$\Delta_1 = 0; \qquad \Delta_2 = 0; \qquad \Delta_3 = 0.$$

Davon enthalten die $(m + 1)$ Gleichungen:

(10) $\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \ldots \Pi^{m-2} = 0; \quad \Delta_1 = 0; \quad \Delta_3 = 0$

nur $\qquad a_2 a_3 \ldots a_m \, x y z y' z' \ldots y^{n-2} z^{n-2}$,

da in Π^{m-2} die höchsten Differentialquotienten y^{n-2} und z^{n-2} sind; dagegen enthalten

(11) $$\Delta_2 = 0; \qquad \Pi^{m-1} = 0$$

noch y^{n-1} und z^{n-1}. Benutzt man nun die (10) allein, so gelangt man durch Elimination von $a_2 a_3 \ldots a_m$ zu zwei Gleichungen mit $x y z y' z' \ldots y^{n-2} z^{n-2}$ allein, welche nach y^{n-2} und z^{n-2} gelöst, ergeben mögen:

(12) $y^{n-2} = Y(x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3}); \quad z^{n-2} = Z(x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3})$,

also einem Systeme von $(2n - 4)$ Differentialgleichungen erster Ordnung äquivalent sind. Die vollständige Integration gibt also die singulären Lösungen y, z unsres Problems mit $(2n - 4)$ Konstanten; etwaige singuläre Lösungen dieses Systems mit höchstens $(2n - 5)$ Konstanten sind dann gleichfalls singuläre Lösungen des Problems. — Es ist nun zu zeigen, dafs Lösungen des Systems (12) erstlich die nicht benutzten (11) und dann die sämtlichen (B) erfüllen, von denen wir ja nur die Determinanten benutzt haben. Man kommt auf dasselbe System (12) durch Auflösung der Gleichungen (10) nach $a_2 a_3 \ldots a_m$ y^{n-2} und z^{n-2}. Diese Auflösungen seien bezeichnet durch

(13) $$\begin{cases} a_2 = A_2, \quad a_3 = A_3, \quad \ldots \quad a_m = A_m, \\ \qquad y^{n-2} = Y, \quad z^{n-2} = Z. \end{cases}$$

Dies sind also Funktionen von $x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3}$. Die Substitution dieser Werte werde durch die Klammer [] bezeichnet. Dann gehen die (10) über in die Identitäten:

(14) $$\begin{cases} [\Pi] \equiv 0; \quad [\Pi'] \equiv 0 \quad \ldots \quad [\Pi^{m-2}] \equiv 0 \\ \qquad [\Delta_1] \equiv 0; \quad [\Delta_3] \equiv 0. \end{cases}$$

Die vollständige Differentiation der ersten gibt

$$\frac{d[\Pi]}{dx} + \frac{\delta[\Pi]}{\delta x} \equiv 0 \qquad \text{oder } [\Pi'] + \left[\frac{\delta \Pi}{\delta x}\right] \equiv 0;$$

also wegen $[\Pi'] \equiv 0$:

$$\left[\frac{\delta \Pi}{\delta x}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \frac{d a_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \cdot \frac{d a_m}{dx}\right] = 0,$$

was ja nur eine andre Schreibweise ist für

$$\frac{\delta[\Pi]}{\delta x} \equiv \frac{\partial[\Pi]}{\partial A_2} \frac{d A_2}{dx} + \ldots \frac{\partial[\Pi]}{\partial A_m} \cdot \frac{d A_m}{dx} = 0.$$

Man kann hier die δ-Zeichen beliebig vor oder unter jene Klammer setzen, da durch die letztre sämtliche a_i gleichmäfsig durch die A_i ersetzt werden; die gleiche Vertauschung bezüglich des d-Zeichens ist nur dann zulässig, wenn y^{n-2} und z^{n-2} nicht ins Spiel kommen. Die Differentiation der zweiten (14) gibt wegen $[\Pi''] \equiv 0$

$$\left[\frac{\delta \Pi'}{\delta x}\right] \equiv 0.$$

So geht dies weiter bis

$$D_x[\Pi^{m-4}] \equiv [\Pi^{m-3}] + \left[\frac{\delta \Pi^{m-4}}{\delta x}\right] \equiv 0,$$

folglich
$$\left[\frac{\delta \Pi^{m-4}}{\delta x}\right] \equiv 0.$$

Nun kommen aber y^{n-2} und z^{n-2} in Betracht. Wir bilden

$$D_x[\Pi^{m-3}] \equiv \frac{d}{dx}[\Pi^{m-3}] + \frac{\delta[\Pi^{m-3}]}{\delta x} \equiv 0,$$

und subtrahieren

$$[\Pi^{m-2}] \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \left[\frac{d \Pi^{m-3}}{dx}\right] \equiv 0.$$

Es ist

$$\frac{d}{dx}[\Pi^{m-3}] \equiv \left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial x}\right] + y'\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial y}\right] + z'\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z}\right] + \cdots + y^{n-3}\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial y^{n-4}}\right] +$$
$$+ z^{n-3}\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z^{n-4}}\right] + y^{n-2}\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial y^{n-3}}\right] + z^{n-2}\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z^{n-3}}\right],$$

dagegen

$$\left[\frac{d \Pi^{m-3}}{dx}\right] = \left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial x}\right] + \cdots + z^{n-3}\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z^{n-4}}\right] + Y\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial y^{n-3}}\right] + Z\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z^{n-3}}\right];$$

also ist

$$D_x[\Pi^{m-3}] - [\Pi^{m-2}] \equiv (y^{n-2} - Y)\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial y^{n-3}}\right] + (z^{n-2} - Z)\left[\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z^{n-3}}\right] + \left[\frac{\delta \Pi^{m-3}}{\delta x}\right] \equiv 0.$$

Es läfst sich leicht direkt einsehen, dafs

$$\frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial y^{n-3}} = \frac{\partial \Pi}{\partial y^{n-m}}, \qquad \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial z^{n-3}} = \frac{\partial \Pi}{\partial z^{n-m}}$$

ist; man findet auch ganz allgemein mit Hilfe der Variationsrechnung für den partiellen Differentialquotienten eines p^{ten} totalen Differentialquotienten von Π die Formel:

$$\frac{\partial \Pi^p}{\partial y^\varkappa} = \sum_0^p{}_i\, p_i \frac{d^{p-i}\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial y^{\varkappa-i}}\right)}{dx^{p-i}}$$

(ganz analog für $z^\varkappa$ statt $y^\varkappa$), woraus sich für $p = m-3$, $\varkappa = n-3$

die obigen Formeln ergeben, da in Π die Differentialquotienten nur bis y^{n-m}, z^{n-m} vorkommen. Wir lassen die keine Schwierigkeit bietende Ableitung der Formel weg, da hier wenig auf sie ankommt. Dann geht aber obige Identität über in

$$(y^{n-2} - Y)\left[\frac{\partial \Pi}{\partial y^{n-m}}\right] + (z^{n-2} - Z)\left[\frac{\partial \Pi}{\partial z^{n-m}}\right] + \left[\frac{\delta \Pi^{m-3}}{\delta x}\right] \equiv 0.$$

Da nun Lösungen des Systems (12) dieses selbst erfüllen, also die ersten beiden Terme vernichten, so zeigt diese Identität, dafs sie auch

$$\frac{\delta \Pi^{m-3}}{\delta x} = 0$$

erfüllen. Aufserdem hatten wir bis jetzt

$$\left[\frac{\delta \Pi}{\delta x}\right] \equiv 0; \quad \left[\frac{\delta \Pi'}{\delta x}\right] \equiv 0 \;\ldots\; \left[\frac{\delta \Pi^{m-4}}{\delta x}\right] \equiv 0; \quad [\Delta_1] \equiv 0; \quad [\Delta_3] \equiv 0,$$

d. h. es werden

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0; \;\ldots\; \frac{\delta \Pi^{m-4}}{\delta x} = 0; \quad \Delta_1 = 0; \quad \Delta_3 = 0$$

durch die Gleichungen (12) und (13) selbst erfüllt, also erst recht durch die Lösungen dieses Systems, weil diese ihrerseits die Gleichungen (12) erfüllen; somit erfüllen die Lösungen die Gleichungen

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0; \quad \frac{\delta \Pi'}{\delta x} = 0; \quad \ldots \quad \frac{\delta \Pi^{m-3}}{\delta x} = 0; \quad \Delta_1 = 0; \quad \Delta_3 = 0.$$

Dann machen sie auch $\frac{\delta \Pi^{m-2}}{\delta x} = 0$; denn machten sie es gleich einer andern Gröfse u, erfüllten sie somit die $(m-1)$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Pi}{\delta x} &\equiv \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \frac{d a_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \cdot \frac{d a_m}{dx} = 0 \\
\frac{\delta \Pi'}{\delta x} &\equiv \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2} \frac{d a_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Pi'}{\partial a_m} \cdot \frac{d a_m}{dx} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\delta \Pi^{m-3}}{\delta x} &\equiv \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_2} \cdot \frac{d a_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_m} \cdot \frac{d a_m}{dx} = 0 \\
\frac{\delta \Pi^{m-2}}{\delta x} &\equiv \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_2} \cdot \frac{d a_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_m} \cdot \frac{d a_m}{dx} = u,
\end{aligned}$$

so ergäbe die Auflösung dieser linearen Gleichungen nach irgend einem $\frac{d a_i}{dx}$, da Δ_1 die Determinante ist:

$$\Delta_1 \cdot \frac{d a_i}{dx} = u \cdot \Delta_i^{m-2},$$

wo Δ_i^{m-2} die im allgemeinen von Null verschiedene Unterdeterminante

des Elements $\frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_i}$ aus der letzten Horizontalreihe des Δ_1 bedeutet; dann ist aber wegen $[\Delta_1] \equiv 0$ auch $[u] \equiv 0$, d. h. $\frac{\delta \Pi^{m-2}}{\delta x}$ wird durch Substitution von Lösungen des Systems (12) identisch gleich Null gemacht. Auf genau dieselbe Weise ergibt sich das gleiche für $\frac{\delta \Pi^{m-1}}{\delta x}$, wenn dabei $[\Delta_2] \equiv 0$ benutzt wird. Dafs aber dieses $\Delta_2 = 0$ erfüllt wird, ergibt sich daraus, dafs mit $\Delta_1 = 0$ auch

$$D_x \Delta_1 = \Delta_2 + \frac{\delta \Delta_1}{\delta x} = 0$$

erfüllt wird, d. h. $\Delta_2 = 0$, sobald $\frac{\delta \Delta_1}{\delta x} = 0$; dafs aber $\frac{\delta \Delta_1}{\delta x} = 0$ erfüllt wird, ergibt sich wie bei $\frac{\delta \Pi^{m-2}}{\delta x} = 0$ durch eine andre Annahme $\frac{\delta \Delta_1}{\delta x} = u$ und Beachtung von $\Delta_3 = 0$. Schliefslich folgt

$$[\Pi^{m-1}] \equiv 0$$

durch Differentiation von $[\Pi^{m-2}] \equiv 0$ und Benutzung des Erfülltwerdens von $\frac{\delta \Pi^{m-2}}{\delta x} = 0$, ebenso

$$[\Pi^m] \equiv 0 \quad \text{aus} \quad \Pi^{m-1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta \Pi^{m-1}}{\delta x} = 0.$$

Es ist somit der fehlende Nachweis geliefert, dafs sämtliche Gleichungen (B) und (4) erfüllt werden und damit alle übrigen Gleichungen des Schemas.

Der bisher behandelte Weg (B) bleibt auch dann anwendbar, wenn die gegebenen Differentialgleichungen (A) nicht lösbar sind nach irgend zweien von den X_i, also auch

(8) $$F(aa_1 \ldots a_m) = 0, \qquad \Phi(aa_1 \ldots a_m) = 0$$

nicht lösbar etwa nach aa_1, welche Gröfsen wir dadurch aus allen Gleichungen entfernten. Ist diese Auflösung unausführbar, so verbindet man die Gleichungen (B), welche jetzt die Form haben:

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx} + \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_2}\frac{da_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_m} \cdot \frac{da_m}{dx} = 0$$
$$i = 0,\ 1 \ldots m-1,$$

also linear und homogen sind bezüglich $\frac{da}{dx}, \frac{da_1}{dx} \cdots \frac{da_m}{dx}$, mit den vollständig differenzierten (8)

$$\frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{\partial F}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_m} \cdot \frac{da_m}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} \cdot \frac{da_m}{dx} = 0.$$

Man hat dann diese $(m+2)$ homogenen Gleichungen zu ersetzen durch m von ihnen (die letzten beiden und von den (B) die $(m-2)$ ersten) und die beiden Determinanten:

$$\vartheta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial F}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a} & \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi'}{\partial a} & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a} & & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a} & & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_m} \end{vmatrix} = 0; \quad \vartheta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial F}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a} & \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a} & & \cdots\cdots & \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi'}{\partial a} & & \cdots\cdots & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a} & & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi^{m-1}}{\partial a} & & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-1}}{\partial a_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Die ersten beiden Horizontalreihen sind nur Funktionen der a und es ist analog wie früher bei Δ_1:

$$\frac{d\vartheta_1}{dx} = \vartheta_2; \quad D_x \vartheta_1 \equiv \frac{d\vartheta_1}{dx} + \frac{\delta \vartheta_1}{\delta x} = \vartheta_2 + \frac{\delta \vartheta_1}{\delta x} = 0,$$

und wegen $\vartheta_2 = 0$:

$$\frac{\delta \vartheta_1}{\delta x} \equiv \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx} + \cdots \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_m} \cdot \frac{da_m}{dx} = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit jenen m schon bei ϑ_1 und ϑ_2 benutzten Gleichungen, so erhält man die neue Determinante

$$\vartheta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} & \cdots\cdots & \frac{\partial F}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a} & \cdots\cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a} & \cdots\cdots & \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a} & \cdots & \frac{\partial \Pi^{m-3}}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a} & \cdots\cdots & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Somit treten in den Gleichungen (10) und (11) diese $\vartheta_1\, \vartheta_2\, \vartheta_3$ an Stelle der $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; fügt man noch die (8) hinzu, so hat man in

(10) $\quad \Pi = 0; \quad \Pi' = 0 \ldots \Pi^{m-2} = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_3 = 0$ und

(8) $F(aa_1 \ldots a_m) = 0, \quad \Phi(aa_1 \ldots a_m) = 0$

$(m+3)$ Gleichungen mit den Gröſsen

$$xyzy'z' \ldots y^{n-2}z^{n-2}aa_1a_2 \ldots a_m$$

wo jetzt die aa_1 auch noch in den $\Pi\Pi'$ etc. vorkommen. Die Elimination von $aa_1 \ldots a_m$ ergibt also wie früher 2 Gleichungen mit $xyzy'z' \ldots y^{n-2}z^{n-2}$, ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieses geht übrigens genau in das frühere über, sobald man jetzt die 8) als lösbar annimmt nach aa_1, so daſs man ihnen die Form geben kann:

$$F \equiv a - \varphi(a_2 \ldots a_m) = 0$$
$$\Phi \equiv a_1 - \psi(a_2 \ldots a_m) = 0;$$

denn nach Ausführung dieser Substitutionen sind die $\Pi\Pi' \cdots$ frei von a und a_1, so daſs sich $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ gerade in $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ verwandeln.

§ 4. **Zweite Methode, Weg (C); Kombinationen (α) und (β).**

Der immer anwendbare Weg (B) benutzte die beiden ersten Vertikalreihen des Schemas (S. 33), um sämtliche $a_2 \ldots a_m$ zu entfernen, und lieferte für die singulären Lösungen y, z immer ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen xyz allein, führte also direkt zum Ziele und dürfte darum in der Regel den Vorzug verdienen. Wir untersuchen nun die Brauchbarkeit des Weges (C) oder der Gleichungen:

(C) $$\frac{\delta\Pi}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta^2\Pi}{\delta x^2} = 0 \cdots \frac{\delta^m\Pi}{\delta x^m} = 0.$$

Im Falle $m = 2$ fällt der Weg (C) mit (B) völlig zusammen, wie wir in § 6 genauer ausführen werden; im Fall $m = 3$ ist, wenn dabei $n = 3$, der Weg (C) möglich, führt aber nicht zum Ziel, wie in § 7 gezeigt werden soll; und sowie $m > 3$ ist, sieht man ohne weiteres, daſs mit den Serret'schen Gleichungen (C) allein nichts anzufangen ist, weil man in $\frac{\delta^m\Pi}{\delta x^m} = 0$ eine einzige Gleichung hat für die $(m-1)$ Unbekannten

$$\frac{d^m a_2}{dx^m}, \quad \frac{d^m a_3}{dx^m}, \quad \ldots \quad \frac{d^m a_m}{dx^m}$$

Nun haben wir aber erörtert, daſs wie die (C), so auch jede andre Kombination von je $(m+1)$ Gleichungen des Schemas (aus jeder Horizontalreihe eine Gleichung) hinreichend ist, um die singulären Lösungen zu definieren; und offenbar darf man zu solchen $(m+1)$ Gleichungen noch beliebig viele Gleichungen des Schemas hinzufügen, wenn man nur beachtet, daſs sie wohl algebraisch unabhängig sind, aber durch Differentiation sämtlich mit einander zusammenhängen. Wir wollen nun zeigen, daſs neben den (B) (zweite Vertikalreihe) auch

andre Kombinationen anwendbar sind; sie führen immer, wie (B), zu einem System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, sind jedoch meist umständlicher, können also nur in ganz besondren Fällen von Nutzen sein. Wir können dabei zwei verschiedene Prinzipien verfolgen, indem wir erstlich darauf ausgehen, xyz und deren sämtliche Ableitungen zu eliminieren und ein System zwischen $a_2 \dots a_m$ allein zu erhalten, wobei a_2 unabhängige Variable sei. Diesen Weg wollen wir (α) nennen und zeigen, dafs er nur in einer Reihe von Fällen anwendbar zu sein scheint. Sodann kann man (β) versuchen, ein gemischtes System zu erhalten, sowohl zwischen einigen der a, wie einem Teil der Ableitungen y und z; dies ist immer möglich.

α) Wir wollen zu Grunde legen die $(m+1)$ Gleichungen

$$\Pi = 0; \quad \delta\Pi = 0$$

und die 3[te] Vertikalreihe unsers Schemas pag. 33:

$$\delta^2\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi' = 0 \dots \delta^2\Pi^{m-2} = 0,$$

welche die Gröfsen $\frac{d^2 a_3}{d a_2{}^2}, \frac{d^2 a_4}{d a_2{}^2} \dots \frac{d^2 a_m}{d a_2{}^2}$ enthalten, wenn wir, wie gesagt, a_2 zur unabhängigen Variabeln machen. Wir fügen immer dazu die übrigen Gleichungen der ersten beiden Reihen

$$\Pi' = 0, \quad \Pi'' = 0 \dots \Pi^{m-2} = 0$$
$$\delta\Pi' = 0, \quad \delta\Pi' = 0 \dots \delta\Pi^{m-2} = 0$$

(also mit Ausnahme der beiden letzten Gleichungen der ersten und der letzten Gleichung der zweiten Reihe:

$$\Pi^{m-1} = 0, \quad \Pi^m = 0, \quad \delta\Pi^{m-1} = 0)$$

und je nach Bedarf einzelne Gleichungen der 4[ten] Reihe. Im folgenden werden wir nun immer die Auflösbarkeit von $(m-2)$ Gleichungen der 3[ten] Reihe nach

$$\frac{d^2 a_3}{d a_2{}^2}, \frac{d^2 a_4}{d a_2{}^2} \dots \frac{d^2 a_m}{d a_2{}^2}$$

voraussetzen. Die $(m-1)$ Gleichungen der 3[ten] Reihe haben die Form:

$$\delta^2\Pi^i \equiv \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_2}\frac{d^2 a_2}{dx^2} + \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_3}\frac{d^2 a_3}{dx^2} + \dots + \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_m}\cdot\frac{d a_m}{dx^2} + \varphi^i = 0$$
$$i = 0, 1, 2 \dots (m-2)$$

worin

$$\varphi^i = \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial a_2{}^2}\cdot\left(\frac{d a_2}{dx}\right)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial a_m{}^2}\cdot\left(\frac{d a_m}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial a_2 \partial a_3}\cdot\frac{d a_2}{dx}\frac{d a_3}{dx} + \dots$$

Diese Gleichungen sind nicht auflösbar nach $\frac{d^2 a_2}{dx^2} \dots \frac{d^2 a_m}{dx^2}$, da die

beteffende Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_m} \end{vmatrix} \equiv \Delta_1 = 0 \text{ war.}$$

Dividiert man jedoch etwa die letzten $(m - 2)$ Gleichungen durch $\left(\frac{d a_2}{d x}\right)^2$ und macht a_2 zur unabhängigen Variabeln, so daſs man die $(m - 2)$ Gleichungen hat:

$$\frac{\partial \Pi^i}{\partial a_3} \cdot \frac{d^2 a_3}{d a_2^2} + \cdots \frac{\partial \Pi^i}{\partial a_m} \cdot \frac{d^2 a_m}{d a_2^2} + \psi^i = 0; \quad i = 1, 2 \ldots m - 2$$

wo $$\psi^i = \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial a_3^2} \left(\frac{d a_3}{d a_2}\right)^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial a_2 \partial a_3} \cdot \frac{d a_3}{d a_2} + \cdots$$

so sind diese auflösbar nach

$$\frac{d^2 a_3}{d a_2^2}, \frac{d^2 a_4}{d a_2^2} \cdots \frac{d^2 a_m}{d a_2^2},$$

sobald

$$\vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi'}{\partial a_3} & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_4} & \cdots \frac{\partial \Pi'}{\partial a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_3} & \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_4} & \cdots \frac{\partial \Pi^{m-2}}{\partial a_m} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist.}$$

ϑ ist aber die Unterdeterminante des ersten Elements in Δ_1, welche im allgemeinen in der That von Null verschieden ist.

Dies vorausgeschickt, wollen wir die folgenden Kombinationen je nach den Werten des m anordnen. Von allen scheint wirklich von Nutzen nur die erste zu sein, nämlich die im Falle

(I) $$m = n$$

brauchbare. Dann geht Π in die allgemeine Lösung f über und es enthalten die beiden ersten Vertikalreihen des Schemas $2n - 2$ Gleichungen (denn drei wollten wir weglassen); dazu nimmt man noch eine Gleichung der 3ten Reihe, etwa die erste; dann bestimmen diese $(2n - 1)$ Gleichungen die $(2n - 1)$ Gröſsen $x y z y' z' \ldots y^{n-2} z^{n-2}$. Setzt man diese Werte in die übrigen $(n - 2)$ Gleichungen der 3ten Reihe, so bestimmen diese die $(n - 2)$ Gröſsen $\frac{d^2 a_3}{d a_2^2} \cdots \frac{d^2 a_n}{d a_2^2}$ als Funktionen von $\frac{d a_3}{d a_2} \cdots \frac{d a_n}{d a_2}\, a_2 a_3 \cdots a_n$, sind also einem System $2(n - 2) = (2n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen den a allein äquivalent. Somit bestimmen sich

$a_3 \dots a_n$ und damit die vorher bestimmten xyz als Funktionen des Parameters a_2 und von $(2n-4)$ Konstanten.

(II) $m = n - 1.$

Alsdann bestimmen die $(2n-4)$ Gleichungen der beiden ersten Reihen (immer mit Ausschlufs jener 3 letzten) und 3 Gleichungen der 3ten Reihe die $(2n-1)$ Gröfsen $xyzy'z' \dots y^{n-2}z^{n-2}$; man hat dann noch $(n-5)$ Gleichungen in der 3ten Reihe, welche etwa $\frac{d^2 a_3}{d a_2^2} \cdots \frac{d^2 a_{n-3}}{d a_2^2}$ bestimmen; dann entnimmt man noch der 4ten Reihe zwei Gleichungen, welche die 3ten Ableitungen der a enthalten; in diese setzt man die obigen Werte von $xyzy'z' \dots y^{n-2}z^{n-2}$ und von $\frac{d^3 a_3}{d a_2^3} \cdots \frac{d^3 a_{n-3}}{d a_2^3}$, welch' letztre sich aus den oben bestimmten 2ten Ableitungen ergeben, so dafs diese zwei Gleichungen nur noch $\frac{d^3 a_{n-2}}{d a_2^3}$ und $\frac{d^3 a_{n-1}}{d a_2^3}$ enthalten. Man hat dann $n-5$ Gleichungen mit den 2ten und zwei Gleichungen mit zweien dritten Ableitungen, also ein System von der Ordnung $2(n-5) + 3 \cdot 2 = 2n - 4$. Dieser Weg ist anwendbar für $n \geqq 5$ und ist es nicht für $n < 5$.

Nun sofort allgemein für

$$m = n - i; \quad i = 0, 1, 2, \dots (n-2)$$

Die $(2n-2i-2)$ Gleichungen der beiden ersten Reihen und $(2i+1)$ Gleichungen der 3ten Reihe bestimmen $xyzy'z' \dots y^{n-2}z^{n-2}$; die übrigen $n - 3i - 2$ Gleichungen der 3ten Reihe bestimmen $\frac{d^2 a_3}{d a_2^2} \cdots \frac{d^2 a_{n-3i}}{d a_2^2}$ also braucht man noch $2i$ Gleichungen der 4ten Reihe, um $\frac{d^3 a_{n-3i+1}}{d a_2^2} \cdots \frac{d^3 a_{n-i}}{d a_2^2}$ zu berechnen, während $\frac{d^3 a_3}{d a_2^3} \cdots \frac{d^3 a_{n-3i}}{d a_2^3}$ sich schon aus den entsprechenden 2ten Ableitungen ergeben. Man hat also ein System von der Ordnung $2(n-3i-2) + 3 \cdot 2i = (2n-4)$. — Dieser Weg ist brauchbar für $n \geqq 3i + 2$, nicht für $n < 3i + 2$. — Wir entwerfen nun ein Bild von der Anwendbarkeit dieser Kombinationen, indem wir sie für

$m = n,\ n-1,\ n-2,\ n-3$ etc. durch

I II III IV etc. bezeichnen und dies in die entsprechende Stelle der Tabelle eintragen. Die jeweilige Ordnung des Systems resp. die Anzahl der Konstanten in der singulären Lösung, die wir s nennen wollen und die immer $= 2n - 4$ war, unabhängig von m, steht oberhalb der betreffenden Kolumne. Ein Strich (—) bedeutet Nichtanwendbarkeit dieser Kombinationen des Weges (α). Der Fall $m = 2$ kommt hier nicht in Betracht, da dann die Wege (B) und (C) zusammenfallen. Für die leeren Felder ist $m > n$, also das Problem überhaupt nicht vorhanden.

$s =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m																		
3	I	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	.	I	II	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	.	.	I	II	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	.	.	.	I	II	III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	.	.	.	.	I	II	III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	—	—	—	—	—	—	—	—
10	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V	—	—	—	—	—	—
11	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V	—	—	—	—	—
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V	VI	—	—	—
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V	VI	—	—
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V	VI	VII
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V	VI
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV	V
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III	IV
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II	III
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	II
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I

β) Wir wollen versuchen, ein gemischtes System zu erhalten, Das ist möglich etwa auf folgende Weise. Man nimmt die beim Wege (B) verwerteten Gleichungen (10) und löst davon

$$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \; \ldots \; \Pi^{m-3} = 0,$$

nach $a_3 \ldots a_m$ und sodann

$$\Pi^{m-2} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta_1 = 0$$

nach y^{n-2} und z^{n-2}, so daſs man alle diese Gröſsen schlieſslich erhält als Funktionen von $a_2\, x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3}$; man setzt diese Werte sämtlich in Δ_3, so daſs man dadurch eine Relation zwischen $a_2\, x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3}$ allein erhält. Nun bildet man durch vollständige Differentiation

$$D_x \Delta_3(a_2\, x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3}) = 0,$$

und ersetzt die dann auftretenden $y^{n-2} z^{n-2}$ durch obige Werte, so daſs diese Gleichung nur enthält: $x y z y' z' \ldots y^{n-3} z^{n-3}\, a_2\, \frac{d a_2}{d x}$; man differenziert nochmals vollständig nach x und erhält, wenn man wieder y^{n-2} und z^{n-2} substituiert, eine Gleichung mit

$$xyzy'z' \ldots y^{n-3} z^{n-3} a_2 \frac{da_2}{dx} \cdot \frac{d^2 a_2}{dx^2}.$$

Somit hat man drei Gleichungen, die im allgemeinen sicher lösbar sind nach y^{n-3}, z^{n-3} und $\frac{d^2 a_2}{dx^2}$, also äquivalent sind einem System $2(n-3)+2=(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, in Übereinstimmung mit dem Früheren. — Im Falle $n=3$ ($m=2$ oder 3) hat man drei Gleichungen mit $xyz\, a_2 \frac{da_2}{dx} \frac{d^2 a_2}{dx^2}$, erhält also durch Elimination von y und z eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen a_2 und x allein.

Dieser Weg (β) ist, wie man sieht, im allgemeinen immer anwendbar, ebenso wie der Weg (B), an den er sich anschliefst.

§ 5. **Die erste und dritte Methode.**

Wie bei der zuerst behandelten Klasse von Differentialgleichungen, so sind auch hier ganz entsprechend drei Methoden möglich. Die bis jetzt behandelte entspricht der dortigen zweiten Methode; es soll gezeigt werden, dafs auch die erste Methode, die der Integration durch Differentiation, ein Analogon besitzt; zuletzt werde die dritte Methode erörtert.

Die Lösungen y, z der Differentialgleichungen (A) erfüllen diese selbst und auch die vollständig differenzierten:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{dx} + \frac{\partial F}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_m}\frac{dX_m}{dx} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{dX}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial X_m}\frac{dX_m}{dx} = 0. \end{cases}$$

Verbinden wir diese mit den S. 26 gefundenen immer geltenden m Identitäten (7):

$$(7) \qquad \sum_0^m{}_h \frac{\partial(\Pi_i)}{\partial X_h} \cdot \frac{dX_h}{dx} = 0; \qquad i = 0, 1, 2 \ldots m-1,$$

so hat man $(m+2)$ lineare homogene Gleichungen für die $\frac{dX_h}{dx}$, die doch nicht identisch Null sein sollen, weil sonst sämtliche a_h konstant würden; also müssen die Determinanten verschwinden.

Wir verbinden die beiden (14) mit den $(m-2)$ ersten (7) und dazu einmal mit der vorletzten, das andre mal mit der letzten (7), so dafs

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} \; \frac{\partial F}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial X_m} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X} \; \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} \\ \frac{\partial (\Pi)}{\partial X} \cdots\cdots \frac{\partial (\Pi)}{\partial X_m} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \frac{\partial (\Pi^{m-3})}{\partial X} \cdots \frac{\partial (\Pi^{m-3})}{\partial X_m} \\ \frac{\partial (\Pi^{m-2})}{\partial X} \cdots \frac{\partial (\Pi^{m-2})}{\partial X_m} \end{vmatrix} = 0; \quad \Theta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} \; \frac{\partial F}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial X_m} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} \\ \frac{\partial (\Pi)}{\partial X} \cdots\cdots \frac{\partial (\Pi)}{\partial X_m} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \frac{\partial (\Pi^{m-3})}{\partial X} \cdots \frac{\partial (\Pi^{m-3})}{\partial X_m} \\ \frac{\partial (\Pi^{m-1})}{\partial X} \cdots \frac{\partial (\Pi^{m-1})}{\partial X_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man jetzt die Differentiation nach x, insofern sie sich auf die Argumente $X X_1 \ldots X_m$ bezieht, durch δ und im übrigen durch d, so dafs

$$D_x \Theta_1 = \frac{d\Theta_1}{dx} + \frac{\delta \Theta_1}{\delta x},$$

worin $$\frac{\delta \Theta_1}{\delta x} \equiv \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \frac{dX}{dx} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial X_1} \frac{dX_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \Theta_1}{\partial X_m} \frac{dX_m}{dx},$$

so ist $$\frac{d\Theta_1}{dx} = \Theta_2;$$

wegen $\Theta_2 = 0$ mufs also $\frac{\delta \Theta_1}{\delta x} = 0$ erfüllt sein. Die Verbindung mit den Gleichungen (14) und den $(m-2)$ ersten (7) gibt die neue Determinante

$$\Theta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial X_m} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X} \cdots\cdots \frac{\partial \Phi}{\partial X_m} \\ \frac{\partial (\Pi)}{\partial X} \cdots\cdots \frac{\partial (\Pi)}{\partial X_m} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \frac{\partial (\Pi^{m-3})}{\partial X} \cdots \frac{\partial (\Pi^{m-3})}{\partial X_m} \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \cdots\cdots \frac{\partial \Theta_1}{\partial X_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Die singulären Lösungen haben also neben den Differentialgleichungen (A) noch diese drei Gleichungen $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_3 = 0$ zu erfüllen. Da nun $F \; \Phi \; \Theta_1 \; \Theta_2 \; \Theta_3$ unabhängige Funktionen sind bezüglich der $X X_1 \ldots X_m$, diese letzteren aber nach § 2 immer abhängig sind bezüglich y^n und z^n, so sind damit auch $F \; \Phi \; \Theta_1 \; \Theta_2 \; \Theta_3$ abhängig bezüglich y^n und z^n; somit ergeben sich aus den fünf Gleichungen:

(A) $F(XX_1 \ldots X_m) = 0, \quad \Phi(XX_1 \ldots X_m) = 0, \quad \Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Theta_3 = 0$ durch Elimination von y^n und z^n vier Gleichungen mit y^{n-1} und z^{n-1}, so daſs die weitre Elimination von y^{n-1} und z^{n-1} nunmehr zwei Gleichungen mit y^{n-2} und z^{n-2} ergibt, also wie früher durch die zweite Methode ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung. — Schreibt man übrigens in den fünf Gleichungen überall $aa_1 \ldots a_m$ an Stelle von $XX_1 \ldots X_m$, so gehen die Gleichungen (A) in die (8) und die $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$ in die $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3$ von S. 40 über; fügt man noch

(1′) $$a = X, \quad a_1 = X_1 \quad \ldots \quad a_m = X_m$$

oder die diesen äquivalenten

(4) $$\Pi = 0, \quad \Pi' = 0 \quad \ldots \quad \Pi^m = 0$$

hinzu, so gelangt man gerade zu den früher durch den Weg (B) der zweiten Methode erhaltenen Gleichungen unter der Annahme, daſs nicht aa_1 von vornherein durch die Gleichungen (8) beseitigt wurden. Es ist so direkt gezeigt, daſs beide Methoden zum gleichen Resultat führen.

Wir kommen nun zur dritten Methode. Dieselbe geht aus von der als existierend vorausgesetzten allgemeinen Lösung:

(16) $$f(xyz\,aa_1 \ldots a_n) = 0,$$

jener Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\Omega(xyz\,y'z' \ldots y^{n+1} z^{n+1}) = 0,$$

von welcher

(1″) $$X = a, \quad X_1 = a_1, \quad \ldots \quad X_m = a_m \quad \ldots \quad X_n = a_n$$

die sämtlichen $(n+1)$ Integrale waren. Diese sind äquivalent den Gleichungen (nach S. 27)

(17) $$f = 0, \quad f' = 0, \quad f'' = 0 \quad \ldots \quad f^n = 0.$$

Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen (A) war dann die Verbindung von

$$(16)\ f = 0 \quad \text{mit} \quad (8)\ F(aa_1 \ldots a_m) = 0, \quad \Phi(aa_1 \ldots a_m) = 0.$$

Um zu den singulären Lösungen zu gelangen, ersetzen wir die (A) wie früher durch die Gleichungen (8) und (1″), indem wir die in den (A) nicht vorhandenen, uns jetzt aber bekannten

$$a_{m+1} = X_{m+1}; \quad \ldots \quad a_n = X_n$$

hinzufügen. Nun sind aber die Gleichungen (1″) ersetzbar durch die (17), also die Differentialgleichungen erfüllt, wenn es die Gleichungen (8) und (17) sind. Dies soll jetzt geschehen, indem wir sämtliche $aa_1 \ldots a_m \ldots a_n$ als Funktionen von x betrachten. Sollen aber dabei die Gleichungen (1″) die Auflösungen der (17) bleiben, welche bei variablen a's so zu schreiben sind:

$$f=0, \quad D_x f=0, \quad D_x^2 f=0, \; \ldots \; D_x^n f=0,$$

so müssen diese letzteren Gleichungen mit den (17) selbst zusammenfallen, also, ganz analog wie früher,

$$(18) \qquad \frac{\delta f}{\delta x}=0, \quad \frac{\delta f'}{\delta x}=0, \quad \frac{\delta f''}{\delta x}=0 \cdots \frac{\delta f^{n-1}}{\delta x}=0,$$

erfüllt sein. Die singulären Lösungen y, z und die zugehörigen Funktionalwerte der $a a_1 \ldots a_n$ haben also zu erfüllen die $(2n+2)$ Gleichungen: (8), (18) und

$$(17') \qquad f=0, \quad f'=0 \; \ldots \; f^{n-1}=0,$$

wobei wir von den (17) jetzt $f^n=0$ weggelassen haben, da es allein y^n und z^n einführen würde. Denken wir aus den Gleichungen (8) etwa a und a_1 und damit $\frac{da}{dx}$ und $\frac{da_1}{dx}$ bestimmt und in alle übrigen Gleichungen eingesetzt, ohne diese Substitution äuſserlich zu markieren, so sind die Gleichungen (18) auch nach der Substitution homogen und linear bezüglich der $\frac{da_2}{dx}, \frac{da_3}{dx} \cdots \frac{da_n}{dx}$, sind somit zu ersetzen durch die $n-2$ ersten und die beiden Determinanten

$$\varDelta_1'=0, \qquad \varDelta_2'=0,$$

$a_2 a_3 \ldots a_n \, x y z y' z' \ldots y^{n-1} z^{n-1}$ enthaltend, welche entstehen, wenn man die $(n-2)$ ersten (18) einmal mit der vorletzten, einmal mit der letzten zusammenstellt. Dann ergibt sich aus $D_x \varDelta_1'=0$ ganz wie früher eine Relation

$$\frac{\delta \varDelta_1'}{\delta x} \equiv \frac{\partial \varDelta_1'}{\partial a_2} \frac{da_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial \varDelta_1'}{\partial a_n} \cdot \frac{da_n}{dx} = 0,$$

welche, verbunden mit den $(n-2)$ ersten (18), eine Determinante $\varDelta_3'=0$ gibt, die, wie $\varDelta_1'$, die Differentialquotienten nur bis $y^{n-2} z^{n-2}$ enthält. Wirft man jetzt einen Blick auf den Weg (B) der zweiten Methode, so sieht man, daſs er mit dem jetzigen sich Schritt für Schritt identificiert, sobald man $\Pi(xyzy'z' \ldots y^{n-m} z^{n-m} a_2 \ldots a_m)$ vertauscht mit $f(xyz\, a_2 a_3 \ldots a_n)$; die weitere dort angestellte Diskussion passt also wörtlich auch hierher, da die (B) in die (18) übergehen, wenn m in n übergeht; die zweite Methode verwandelt sich also in die dritte für $m=n$. Daſs auch das Resultat dasselbe ist, wenn man beide Methoden nebeneinander anwendet, zeigt die Verfolgung jenes Weges (B); dort hatte man aus den $(m+1)$ Gleichungen:

$$(10) \quad \Pi=0; \quad \Pi'=0; \; \ldots \; \Pi^{m-2}=0; \quad \varDelta_1=0, \quad \varDelta_3=0;$$

die $(m-1)$ Gröſsen $a_2 a_3 \ldots a_m$ zu eliminieren; hier dagegen aus den $(n+1)$ Gleichungen:

$$(10^\alpha) \quad f=0; \quad f'=0; \ldots f^{n-2}=0; \quad \Delta_1'=0; \quad \Delta_3'=0$$

die $(n-1)$ Gröſsen $a_2 \ldots a_m \ldots a_n$; in beiden Fällen bleiben zwei Gleichungen mit $xyzy'z' \ldots y^{n-2} z^{n-2}$, also ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Offenbar ist wie bei der zweiten, so auch hier bei der dritten Methode der von uns mit (B) bezeichnete Weg stets anwendbar; doch scheint er hier im allgemeinen nur umständlicher zu sein, da man $(n-m)$ Gleichungen und $(n-m)$ zu eliminierende Gröſsen mehr hat, als bei der zweiten Methode und schlieſslich doch auf dasselbe System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung kommt. Ein Vorzug würde jedoch dann eintreten, wenn Π eine recht unbehilfliche, f aber eine einfache Form hat, so daſs sich mit den $(n+1)$ Gleichungen (10^α) doch leichter operieren läſst als mit den $(m+1)$ Gleichungen (10).

Wir haben nun zu untersuchen, ob man bei der dritten Methode noch andre Wege einschlagen kann. Jene Gleichungen (18) haben, ganz wie die (B) der zweiten Methode, das Schema zur Folge:

$$\begin{array}{llll|llll}
f(xyz\,a_2 a_3 \ldots a_n)=0 & & & & & & & \\
f'=0; & \delta f=0 & & & & & & \\
f''=0; & \delta f'=0; & \delta^2 f=0 & & & & & \\
f'''=0; & \delta f''=0; & \delta^2 f'=0; & & & & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & & & \\
f^{n-2}=0; & \delta f^{n-3}=0; & \delta^2 f^{n-4}=0; & & \delta^{n-2} f=0; & & & \\
f^{n-1}=0; & \delta f^{n-2}=0; & \delta^2 f^{n-3}=0; & & \delta^{n-2} f'=0; & \delta^{n-1} f=0; & & \\
f^{n}=0; & \delta f^{n-1}=0; & \delta^2 f^{n-2}=0; & & \delta^{n-2} f''=0; & \delta^{n-1} f'=0; & \delta^n f=0. &
\end{array}$$

Dies ist unser früheres Schema der zweiten Methode, nur für $m=n$, wobei Π in f übergeht. Was also von der Brauchbarkeit des Weges (C) bei der zweiten Methode (§ 4) gesagt wurde, gilt hier unverändert: Weg (C) ist nur bei $m=2$ anwendbar, wo er mit (B) zusammenfällt (cf. § 6); im übrigen tritt die in § 4 mit (α I) bezeichnete Kombination in Kraft, welche für $m=n$ galt und die drei ersten Vertikalreihen des Schema's benutzte. Sie führt, wie dort erörtert wurde, auf ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung und bestimmt $a_3 a_4 \ldots a_n$, und damit indirekt xyz, als Funktionen des Parameters a_2 und von $(2n-4)$ Konstanten. Eine andre Kombination scheint bei der dritten Methode nicht anwendbar zu sein.

§ 6.

Wir haben noch die Fälle $m = 2$ und $m = 3$ eingehender zu betrachten. Beiläufig sei bemerkt, dafs unsre Methoden auf keine singulären Lösungen führen im Falle $m = 1$, da die dann auftretenden Gleichungen

$$F(a\,a_1) = 0, \qquad \Phi(a\,a_1) = 0$$

a und a_1 konstant machen würden.

Der Fall $m = 2$ ist ganz besonders übersichtlich, da bei ihm keinerlei Zweifel über den einzuschlagenden Weg herrschen können; beide Wege (B) und (C) fallen hier zusammen. Die Differentialgleichungen

(A) $$F(X X_1 X_2) = 0, \qquad \Phi(X X_1 X_2) = 0$$

seien lösbar nach X_1 und X_2:

$$X_1 = \varphi(X), \qquad X_2 = \psi(X).$$

Nachdem alsdann a_1 und a_2 durch

$$a_1 = \varphi(a); \qquad a_2 = \psi(a)$$

entfernt worden sind, genügen die singulären Lösungen dem Schema von Gleichungen:

$$\Pi(x y z y' z' \ldots y^{n-2} z^{n-2} a) = 0$$

$$\Pi' = 0, \qquad \frac{\delta \Pi}{\delta x} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{da}{dx} = 0$$

$$\Pi'' = 0, \qquad \frac{\delta \Pi'}{\delta x} \equiv \frac{\partial \Pi'}{\partial a}\frac{da}{dx} = 0, \qquad \frac{\delta^2 \Pi}{\delta x^2} = 0.$$

Die Determinante Δ_1 reduciert sich auf ein Element

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$$

was auch direkt resultiert, da $\frac{da}{dx} \neq 0$ sein soll. Δ_3 reduciert sich gleichfalls auf ein Glied:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial a} \equiv \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} = 0.$$

Wegen $\frac{da}{dx} \neq 0$ reduciert sich aber auch

$$\frac{\delta^2 \Pi}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \cdot \frac{da}{dx} = 0 \quad \text{auf} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} = 0.$$

Somit führt bei $m = 2$ und beliebigem n sowohl der Weg (B):

$$\Pi = 0; \quad \Delta_1 = 0; \quad \Delta_3 = 0;$$

wie der Weg (C):

$$\Pi = 0, \quad \frac{\delta \Pi}{\delta x} = 0; \quad \frac{\delta^2 \Pi}{\delta x^2} = 0$$

auf genau dieselben drei Gleichungen:

(19) $$\Pi = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} = 0.$$

Die Elimination von a gibt also für die singulären Lösungen ein System $(2n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen xyz. Im einfachsten Fall $n=2$ ist $2n-4=0$, man hat also drei endliche Gleichungen, die durch blofse Auflösung nach a, y, z die unbekannten Funktionen direkt ergeben. Alsdann ist es bekannt,*) dafs die singulären Lösungen die Rückkehrkante der Enveloppenfläche derjenigen Schaar von Oberflächen $f(xyz\,a\,a_1\,a_2) = 0$ darstellen, deren Bestimmungspunkte $a\,a_1\,a_2$ auf der Kurve
$$a_1 = \varphi(a), \qquad a_2 = \psi(a)$$
liegen, wo $a\,a_1\,a_2$ als laufende Koordinaten anzusehen sind.

Was die Existenz der singulären Lösungen anlangt, so ist klar, dafs solche für $m=n=2$ nicht vorhanden sind, nicht blos wenn f linear in a ist, sondern allgemeiner, wenn a nur in zwei Verbindungen vorkommt, von denen eine, $\mathfrak{F}(a)$, irgend wie beschaffen, die andere aber linear ist, sodafs f die Form hat:
$$f(xyz\,a) \equiv f_1(xyz) + \mathfrak{F}(a)\cdot f_2(xyz) + a\cdot f_3(xyz) = 0;$$
dann ist
$$\frac{\partial f}{\partial a} \equiv \frac{\partial \mathfrak{F}(a)}{\partial a}\cdot f_2 + f_3 = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(a)}{\partial a^2}\cdot f_2 = 0.$$

Da $f_2 \neq 0$ sein soll, so müfste $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}(a)}{\partial a^2} = 0$ sein; dies enthält aber a allein, macht es also konstant und gibt somit keine singuläre Lösung. Bei $n>2$ gilt Analoges; es darf $\Pi(xyz \ldots y^{n-2} z^{n-2} a)$ nicht die Form haben
$$\Pi \equiv \Pi_1 + \mathfrak{F}(a)\cdot \Pi_2 + a\cdot \Pi_3 = 0,$$
worin $\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3$ Funktionen von $xyz \ldots y^{n-2} z^{n-2}$ allein sind; denn dann wird
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} \equiv \frac{\partial \mathfrak{F}(a)}{\partial a}\cdot \Pi_2 + \Pi_3; \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(a)}{\partial a^2}\cdot \Pi_2 = 0;$$
und $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}(a)}{\partial a^2} = 0$ macht wieder a konstant.

Singuläre Lösungen existieren ferner nicht, sobald, bei $m=n=2$, y und z nur in einer von a freien Verbindung u in $f(xyz\,a)$ vorkommen; denn Elimination dieses u aus (19) ergäbe zwei Gleichungen mit x und a allein, machte also beide konstant.

---

*) Vortrag des Herrn Prof. Dr. A. Mayer im Königl. mathemat. Seminar, Februar 1883.

Wir geben einige Beispiele für die einfacheren Fälle.

1.) $$m = n = 2.$$

Die Integrale einer totalen Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$y''z''' - z''y''' = 0 \qquad \text{sind:}$$

$$X \equiv \frac{z'y'' - y'z''}{s} = a; \qquad X_1 \equiv \frac{z''}{s} = a_1; \qquad X_2 \equiv -\frac{y''}{s} = a_2,$$

wo $$s = y''(z - xz') - z''(y - xy')$$

Dies sind die Auflösungen von

$$f \equiv ax + a_1 y + a_2 z + 1 = 0$$
$$f' \equiv a + a_1 y' + a_2 z' = 0$$
$$f'' \equiv a_1 y'' + a_2 z'' = 0.$$

Die Differentialgleichungen seien

$$X_1 = X^2; \qquad X_2 = X^3.$$

Dann ist deren allgemeine Lösung, indem man $a_1 = a^2$, $a_2 = a^3$ einsetzt:

$$f \equiv ax + a^2 y + a^3 z + 1 = 0.$$

Die Gleichungen (19) lauten:

$$f \equiv ax + a^2 y + a^3 z + 1 = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial a} \equiv x + 2ay + 3a^2 z = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \equiv 2(y + 3az) = 0,$$

und geben die singulären Lösungen

$$y = \frac{x^2}{3}; \qquad z = \frac{x^3}{27}; \qquad a = -\frac{3}{x}$$

2.) $$m = 2, \quad n = 3.$$

Die Integrale einer Differentialgleichung vierter Ordnung,

$$X = \frac{-z'''}{\sigma}; \qquad X_1 = \frac{y'''}{\sigma}; \qquad X_2 = \frac{y'z''' - z'y''' - x\sigma}{\sigma},$$

wo $$\sigma = y''z''' - z''y''',$$

sind entstanden aus

$$\Pi \equiv ay' + a_1 z' + a_2 + x = 0.$$

Die Differentialgleichungen seien dieselben wie vorhin, so dafs

$$a_1 = a^2; \qquad a_2 = a^3.$$

Dann sind jene (19):

$$\Pi \equiv ay' + a^2 z' + a^3 + x = 0; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial a} \equiv y' + 2az' + 3a^2 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \equiv 2(z' + 3a) = 0$$

und liefern

$$y' = 3x^{2/3}; \qquad z' = 3x^{1/3}; \qquad a = -x^{1/3},$$

und durch vollständige Integration die singulären Lösungen mit zwei willkürlichen Konstanten:

$$y = \frac{9}{5}x^{5/3} + c_1; \qquad z = \frac{9}{4}x^{4/3} + c_2.$$

3.) $$m = 2, \quad n = 3.$$

Wir gehen nun zu dem Serret'schen Beispiel über. Es sei von einer unbekannten Kurve $y(x)$, $z(x)$ die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte mit den laufenden Koordinaten abc gegeben:

$$F(abc) = 0; \qquad \Phi(abc) = 0,$$

oder in gelöster Form

$$b = \varphi(a); \qquad c = \psi(a).$$

Gesucht wird die ursprüngliche Kurve $y(x)$, $z(x)$. Die Schmiegungskugel geht durch vier benachbarte Kurvenpunkte; dann genügen die Koordinaten abc ihres Mittelpunkts und ihr Radius R den vier Gleichungen (der Kugelgleichung und ihren drei ersten Ableitungen):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$
$$x - a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0$$
$$1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0$$
$$3(y'y'' + z'z'') + y'''(y-b) + z'''(z-c) = 0.$$

Benutzt man die Abkürzungen

$$1 + y'^2 + z'^2 = s; \qquad y'y'' + z'z'' = t,$$

so ergibt sich, während die erste Gleichung nur den Radius definiert, durch Auflösung der drei letzten:

$$a = x + \frac{3t(y'z'' - z'y'') - s(y'z''' - z'y''')}{y''z''' - z''y'''} = X;$$

$$b = y - \frac{3tz'' - sz'''}{y''z''' - z''y'''} = X_1;$$

$$c = z + \frac{3ty'' - sy'''}{y''z''' - z''y'''} = X_2.$$

Dies sind drei Integrale einer Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(3tz'' - sz''')y^{IV} - (3ty'' - sy''')z^{IV} +$$
$$+ [4(y'y''' + z'z''') + 3(y''^2 + z''^2)](y''z''' - z''y''') = 0,$$

die wir aber nicht weiter brauchen. Die Differentialgleichungen (A) lauten somit in gelöster Form:

$$X_1 = \varphi(X); \qquad X_2 = \psi(X).$$

Dann ist

$$\Pi \equiv x - a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0$$

und $$b = \varphi(a); \qquad c = \psi(a).$$

Die vollständige Integration gibt die allgemeine Lösung

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\\ b=\varphi(a); \qquad c=\psi(a).\end{cases}$$

Dieselbe wird also dargestellt durch alle Kugeln mit beliebigem Radius, deren Centren abc auf der gegebenen Kurve liegen. Dafs alle auf diesen Kugeln gezogenen Kurven die Aufgabe lösen, ist evident.

Nun zur singulären Lösung. Die (19) sind:

$$\Pi \equiv x-a+y'(y-\varphi)+z'(z-\psi)=0$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a}\equiv 1+y'.\,\varphi'a+z'.\,\psi'a=0$$

$$-\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\equiv y'.\,\varphi''a+z'.\,\psi''a=0.$$

Diese drei Gleichungen hätte man nach $ay'z'$ zu lösen. Da aber bei allgemeinen φ und ψ die Lösung nach a unmöglich ist, bleibt nur der Ausweg, a zur unabhängigen Variabeln zu machen. Setzt man

$$\frac{dx}{da}=\xi, \qquad \frac{dy}{da}=\eta, \qquad \frac{dz}{da}=\zeta, \qquad \text{so ist}$$

$$y'=\frac{\eta}{\xi}; \qquad z'=\frac{\zeta}{\xi},$$

und jene drei Gleichungen gehen über in:

(I) $$(x-a)\,\xi+(y-\varphi)\,\eta+(z-\psi)\,\zeta=0$$

(II) $$\xi+\varphi'.\,\eta+\psi'.\,\zeta=0$$

(III) $$\varphi''.\,\eta+\psi''.\,\zeta=0.$$

Infolge der Homogenität verschwindet die Determinante

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x-a & y-\varphi & z-\psi \\ 1 & \varphi' & \psi' \\ 0 & \varphi'' & \psi'' \end{vmatrix}=(x-a)\vartheta+(z-\psi)\varphi''-(y-\varphi)\psi''=0,$$

wo $\vartheta=\varphi'\psi''-\varphi''\psi'$ eine gegebene Funktion von a ist. Somit haben die Funktionen xyz von a zu erfüllen (II), (III) und $\varDelta=0$; sie erfüllen auch die nach a differenzierte

$$\frac{d\varDelta}{da}\equiv(x-a)\vartheta'+\vartheta(\xi-1)-(y-\varphi)\psi'''+(z-\psi)\varphi'''-(\eta-\varphi')\psi''+ \\ +(\zeta-\psi')\,\varphi''=0,$$

wo $\vartheta'=\varphi'\psi'''-\varphi'''\psi'$. Eliminiert man aus

$$\varDelta=0; \qquad \frac{d\varDelta}{da}=0 \text{ und (II.)}$$

die Gröfsen $x-a$ und ξ, so bekommt man

$$\eta(\psi'' + \varphi'\vartheta) + \zeta(-\varphi'' + \psi'\vartheta) = (y-\varphi)\frac{\psi''\vartheta' - \psi'''.\vartheta}{\vartheta} +$$
$$+ (z-\psi)\frac{-\varphi''\vartheta' + \varphi'''\vartheta}{\vartheta}.$$

Löst man diese und (III) nach η und ζ, so hat man

$$\eta = \frac{dy}{da} = \frac{\psi''(\varphi''\psi''' - \psi''\varphi''')\,[(y-\varphi)\psi' - (z-\psi)\varphi']}{\vartheta(\vartheta^2 + \varphi''^2 + \psi''^2)}$$

$$\zeta = \frac{dz}{da} = -\frac{\varphi''(\varphi''\psi''' - \psi''\varphi''')\,[(y-\varphi)\psi' - (z-\psi)\varphi']}{\vartheta(\vartheta^2 + \varphi''^2 + \psi''^2)}.$$

Die vollständige Integration dieses Systems von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung liefert y und z als Funktionen des Parameters a und zweier Konstanten. Dann ergibt sich aus $\Delta = 0$:

$$x = a + \frac{(y-\varphi)\psi'' - (z-\psi)\varphi''}{\vartheta}$$

als Funktion derselben Gröfsen.

Ist die Kurve $b = \varphi(a)$, $c = \psi(a)$ eine ebene, so ist

$$\varphi''\psi''' - \psi''\varphi''' = 0,$$

und damit

$$\frac{dy}{da} = \frac{dz}{da} = 0, \qquad y = \text{const.}, \qquad z = \text{const.},$$

so dafs also in diesem Falle keine singuläre Lösung existiert.

§ 7.

Zur Behandlung des Falles $m = 3$ mit Hilfe unsrer allgemein aufgestellten Methoden ist nichts weiter zu bemerken; was jedoch einige Worte erfordert, ist der schon in § 4 betonte Umstand, dafs bei $m = n = 3$ die von Serret aufgestellten Gleichungen (C) scheinbar zu einer singulären Lösung führen; wir werden zeigen, dafs dies nicht der Fall, jener Weg also unbrauchbar ist. — Nachdem man durch die Gleichungen

$$F(aa_1a_2a_3) = 0; \qquad \Phi(aa_1a_2a_3) = 0$$

etwa a_2 und a_3 entfernt hat, hat man

$$\Pi(xyzy'z' \ldots y^{n-3}z^{n-3}aa_1) = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a} & \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \Pi'}{\partial a} & \frac{\partial \Pi'}{\partial a_1} \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a} & \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial a} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Auf dem Wege (B) ist zu nehmen

$$\Pi = 0; \qquad \Pi' = 0; \qquad \Delta_1 = 0; \qquad \Delta_3 = 0.$$

Die Elimination von aa_1 gibt zwei Gleichungen mit $xyz\ldots y^{n-2}z^{n-2}$,

also wie immer ein System $(2n - 4)^{ter}$ Ordnung. Nun betrachten wir jenen Weg (C) für $n = 3$. Dann tritt $f(xyzaa_1)$ für Π ein und die (C) lauten

$$f(xyzaa_1) = 0; \quad \frac{\delta f}{\delta x} = 0; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 0; \quad \frac{\delta^3 f}{\delta x^3} = 0.$$

Macht man a zur unabhängigen Variabeln, so enthalten diese vier Gleichungen die Gröfsen $xyzaa_1 \frac{da_1}{da}, \frac{d^2a_1}{da^2}, \frac{d^3a_1}{da^3}$ und man erhält durch Elimination von xyz eine Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen a und a_1, gewinnt also a_1 und damit xyz als Funktion des Parameters a und dreier Konstanten. Dafs dies aber keine singuläre Lösung sein kann, ergibt einerseits der Vergleich mit dem Wege (B), der die singuläre Lösung nur mit zwei Konstanten ergibt, andrerseits die Anwendung der Kombination (αI) für $m = n = 3$. Diese verlangt die Elimination von $xyzy'z'$ aus den sechs Gleichungen:

$$f = 0; \quad \frac{\delta f}{\delta a} = 0; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta a^2} = 0; \quad f' = 0; \quad \frac{\delta f'}{\delta a} = 0; \quad \frac{\delta^2 f'}{\delta a^2} = 0$$

(welche ja, wie allgemein bewiesen, auch $\frac{\delta^3 f}{\delta x^3} = 0$ nach sich ziehen), und gibt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen a_1 und a, gibt also a_1 und damit xyz mit nur zwei Konstanten, in Übereinstimmung mit Weg (B).

Ergebnis des zweiten Teils.

Unsre Untersuchung hat Folgendes ergeben. Wenn unser Problem überhaupt eine singuläre Lösung besitzt, so gelangt man zu dieser unter allen Umständen mit Hilfe des Weges (B) der zweiten Methode, und zwar direkt durch Aufstellung eines Systems $(2n - 4)^{ter}$ Ordnung zwischen xyz. Ebenso ist stets anwendbar die Kombination (β), welche gemischte Systeme gibt, und zwar von der $(n - 3)^{ten}$ Ordnung für y und für z, und von der zweiten für a_2. In einer gewissen Reihe von Fällen (cf. Tabelle) kann man, je nachdem $m = n, n - 1, n - 2$ etc. ist, eine Reihe andrer Kombinationen (α) I, II, III etc. benutzen, welche xyz ganz entfernen und Systeme $(2n - 4)^{ter}$ Ordnung zwischen den a allein ergeben. Kennt man aber die allgemeine Lösung des Problems, so kann man in allen Fällen den Weg (B) der dritten Methode anwenden, ebenso aber auch den Weg (αI), beide geben Systeme $(2n - 4)^{ter}$ Ordnung. —

Die als vollständige Lösung dieses Systems $(2n - 4)^{ter}$ Ordnung erhaltnen singulären Lösungen des Problems würden nicht wirklich

singulär sein, wenn sich dabei sämtliche a konstant ergäben, was im allgemeinen jedoch nicht anzunehmen ist. Besitzt das System seinerseits singuläre Lösungen mit höchstens $(2n - 5)$ Konstanten, so sind dies wiederum, und zwar in der Regel vereinzelte, singuläre Lösungen des Problems.

Es ist bemerkenswert, dafs die im ersten Teil behandelten Differentialgleichungen stets auf Systeme $(2n - 1)^{\text{ter}}$, also ungeradzahliger Ordnung führen, die des zweiten Teils dagegen auf solche $(2n - 4)^{\text{ter}}$, also geradzahliger Ordnung.

Vita.

Ich, Ernst Otto Paul Pfitzner, evangelisch-lutherischer Konfession, wurde geboren am 22. Oktober 1858 zu Buchwald in Schlesien. Mein Vater, Adolf Robert Pfitzner, wandte sich im Jahre 1861 nach Dresden, wo er noch heute als Privatmann lebt. Er brachte mich zur Neustadt-Dresdner Realschule I. O., welche ich Ostern 1876 mit dem Reifezeugnis verliefs. Ich studierte nun Mathematik, und zwar die drei ersten Semester am Dresdner Polytechnikum, die vier folgenden an der Universität Leipzig. Eine schwere Ohrenkrankheit zwang mich hierauf, mein Studium zu unterbrechen; nach der Wiederherstellung genügte ich meiner militärischen Dienstpflicht (Michaeli 1879—80) und nahm sodann meine Studien in Leipzig wieder auf, wo ich sie auch beendete, nachdem ich inzwischen noch ein Semester (Winter 1881—82) am Dresdner Polytechnikum hospitiert hatte. In Leipzig habe ich besucht die Vorlesungen der Herren Professoren Biedermann, Hankel, Hofmann, A. Mayer, von der Mühll, Neumann, von Noorden, Scheibner und Wundt und teilgenommen an den Übungen der Herren Hankel, Hofmann, Mayer und Wundt; in Dresden hörte ich bei den Herren Böhmert, Burmester, Fuhrmann, Königsberger, Koppel, Kuschel, Fritz Schultze, Stern, Töpler, Vetter, Voss, Zeuner und beteiligte mich an den Übungen der Herren Böhmert, Burmester, Stern und Voss. — Im November 1883 erwarb ich durch das Staatsexamen die facultas docendi für alle Klassen der Gymnasien und Realschulen I. O. in Mathematik, Physik und philosophischer Propädeutik und wurde am 1. Dezember 1883 als Probelehrer am hiesigen Königl. Gymnasium angestellt.

Allen meinen verehrten Lehrern, ganz besonders aber den Herren Professoren A. Mayer und Wundt, bin ich zu herzlichstem Danke verpflichtet.